

А. И. НОВИКОВ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

ПОСОБИЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

*Допущено Научно-методическим советом по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для поступающих в вузы,
слушателей подготовительных отделений, подготовительных
курсов, физико-математических школ при вузах, студентов
вузов, обучающихся по направлению «Образование и педагогика»
(050000) и специальности «Математика» (050201),
преподавателей математики*



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2010

УДК 514.116.2
ББК 22.151.0
Н73

Новиков А.И. **Тригонометрические функции, уравнения и неравенства.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 260 с. — ISBN 978-5-9221-1173-7.

Содержит подробное изложение курса тригонометрии в примерах и задачах.

Допущено Научно-методическим советом по математике Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для поступающих в вузы, слушателей подготовительных отделений, подготовительных курсов, физико-математических школ при вузах, студентов вузов, обучающихся по направлению «Образование и педагогика» (050000) и специальности «Математика» (050201), преподавателей математики.

ISBN 978-5-9221-1173-7

© ФИЗМАТЛИТ, 2010

© А. И. Новиков, 2010

Предисловие

Пособие для системного повторения и изучения курса тригонометрии рассчитано на аудитории с различными уровнями математической подготовки. Задачи, а также отдельные подразделы, адресованные аудиториям с углубленным изучением математики, в пособии отмечены значком * (звездочка).

Основу пособия составляют пять основных разделов, имеющих однотипную структуру. В начале каждого раздела, подраздела или пункта даются краткие теоретические сведения. Затем подробно разбирается решение типовых задач, иллюстрирующих и/или расширяющих теоретический материал. Каждый раздел завершается обширной подборкой задач для самостоятельного решения и, в частности, задач вступительных экзаменов в вузы. Окончание доказательства утверждений отмечается значком ■ (заштрихованный квадрат).

В первом разделе — «Тригонометрические функции» — подобраны задачи, позволяющие понять и глубже усвоить основные свойства тригонометрических функций. Второй раздел как по структуре, так и по содержанию традиционен для пособий такого типа.

Особое место в пособии занимает третий раздел — «Обратные функции. Обратные тригонометрические функции». Этот раздел, как правило, слабо изучается в средней школе; не уделяется ему должное внимание и в стандартных вузовских курсах математики. В традиционных учебниках и пособиях по математике, предназначенных для средней школы, изучение обратных функций сводится в основном к обратным тригонометрическим функциям. В настоящем пособии достаточно широко представлены задачи на нахождение обратных функций и построение их графиков для различных классов функций. Рассматриваются уравнения, решаемые с использованием свойств взаимно обратных функций. Тщательно изучаются и обратные тригонометрические функции.

Тригонометрические уравнения и неравенства достаточно полно представлены соответственно в четвертом и пятом разделах.

В шестом разделе пособия приведены контрольные работы, соответствующие тематике основных разделов.

Многие задачи тригонометрии можно решать различными способами, не обязательно равноценными, но приводящими к искомому результату. Владение широким спектром решения задач, с одной стороны, является составной частью математической культуры учащегося, а с другой, существенно повышает шансы на успешное решение задач на экзамене. Этому аспекту уделено достаточно большое внимание во всех разделах пособия, прежде всего в третьем и в четвертом разделах.

Пособие предназначено для использования в школах и классах физико-математического профиля, а также в системе организованной довузовской подготовки (подготовительные курсы, факультеты довузовской подготовки и т. п.). Предлагаемые пособием способы изучения материала (теоретические сведения → решение типовых задач → самостоятельное решение аналогичных задач) позволяют рекомендовать его и тем абитуриентам, которые готовятся к вступительным экзаменам самостоятельно.

Пособие можно использовать для подготовки к экзаменам, проводимым как в классической, так и в тестовой формах. Условиям тестовых экзаменов соответствуют задачи первого и второго разделов, а также отдельные задачи остальных разделов.

Основная цель пособия — подготовка не только к вступительным экзаменам, но и к обучению в вузе. С учетом сказанного автор надеется, что пособие отвечает запросам профильных классов с углубленным изучением математики и системы довузовской подготовки и что оно представляет интерес для преподавателей математики школ, лицеев и гимназий.

Раздел 1

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Основным вопросом для любого класса функций является изучение свойств функций, входящих в этот класс. Первый раздел пособия полностью посвящен изучению свойств тригонометрических функций. Предполагается, что читатель знаком с основными понятиями и способами исследования функций. Вместе с тем в соответствующих пунктах данного раздела приводятся определения четной (нечетной) функции, интервалов возрастания (убывания), локальных экстремумов и наибольшего (наименьшего) значений функции на промежутке. Изучение каждого свойства функции осуществляется через решение специальных подборок задач.

1.1. Определение и свойства тригонометрических функций

1.1.1. Функции синус и косинус

На координатной плоскости $O\tilde{x}\tilde{y}$ построим окружность единичного радиуса (которая называется *единичной*, или *тригонометрической окружностью*) с центром в точке O . Пусть M_x — произвольная точка окружности и вектор $\vec{OM}_x$ образует с положительным направлением оси $O\tilde{x}$ угол x радиан. При этом величина угла x считается положительной, если отсчет ведется от положительного направления оси $O\tilde{x}$ против хода часовой стрелки, и отрицательным — по ходу часовой стрелки.

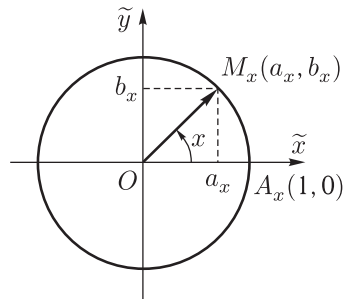


Рис. 1.1

Определение 1.1. *Синусом* угла x называется число b_x , равное ординате конца M_x единичного радиус-вектора $\vec{OM}_x$, образующего угол x с положительным направлением оси $O\tilde{x}$ (рис. 1.1). Это число обозначается $\sin x$.

Определение 1.2. Косинусом угла x называется число a_x , равное абсциссе конца M_x (рис. 1.1) единичного радиус-вектора $\overrightarrow{OM_x}$, образующего угол x с положительным направлением оси $O\tilde{x}$. Это число обозначается $\cos x$.

Таким образом, $b_x = \sin x$, $a_x = \cos x$.

Каждому действительному числу x (углу x радиан) отвечают единственное число $\sin x$ и единственное число $\cos x$, поэтому отображения $x \rightarrow \sin x$ и $x \rightarrow \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, являются функциями.

Свойства функций $\sin x$ и $\cos x$

1. Область определения: $D(\sin x) = D(\cos x) = \mathbb{R}$.
2. Область значений: $E(\sin x) = E(\cos x) = [-1; 1]$.
3. Периодичность: периодические с основным (наименьшим положительным) периодом 2π .
4. Четность и нечетность: $\sin x$ — нечетная функция, $\cos x$ — четная.
5. Интервалы монотонности:

$\sin x$ возрастает при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$;

убывает при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\cos x$ возрастает при $x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$;

убывает при $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

6. Экстремальные значения:

$\max_{x \in \mathbb{R}} \sin x = 1$ достигается в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$\min_{x \in \mathbb{R}} \sin x = -1$ в точках $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$\max_{x \in \mathbb{R}} \cos x = 1$ в точках $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

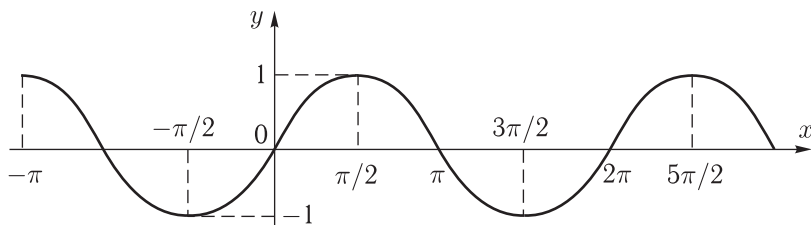
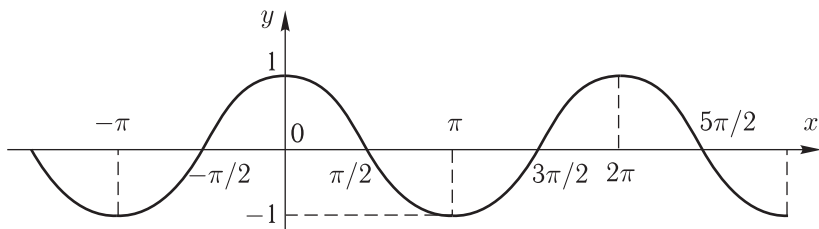
$\min_{x \in \mathbb{R}} \cos x = -1$ в точках $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

7. Для любого угла x : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Графики функций $\sin x$ и $\cos x$ приведены на рис. 1.2 и 1.3 соответственно.

1.1.2. Функции тангенс и котангенс

Определение 1.3. Тангенсом угла x называется отношение ординаты b_x точки M_x (рис. 1.1) к абсциссе a_x , обозначаемое $\operatorname{tg} x$.

Рис. 1.2. График функции $y = \sin x$ Рис. 1.3. График функции $y = \cos x$

Поскольку $b_x = \sin x$, $a_x = \cos x$, то

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^1). \quad (1.1)$$

Определение 1.4. Котангенсом угла x называется отношение абсциссы a_x точки M_x (рис. 1.1) к ординате b_x , обозначаемое $\operatorname{ctg} x$.

Поскольку $b_x = \sin x$, $a_x = \cos x$, то

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq \pi n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (1.2)$$

Свойства функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$

1. Области определения:

$$D(\operatorname{tg} x) = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \forall n \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$D(\operatorname{ctg} x) = \{ x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq \pi n, \forall n \in \mathbb{Z} \}.$$

2. Область значений: $E(\operatorname{tg} x) = E(\operatorname{ctg} x) = \mathbb{R}$.

3. Периодичность: периодические с основным периодом π .

¹⁾ $\forall$ — квантор общности, заменяет слова: «каждый», «любой», «для любого», «для всех» и т. п.

4. Четность и нечетность: нечетные функции.

5. Интервалы монотонности:

$\operatorname{tg} x$ строго возрастает на каждом интервале

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z};$$

$\operatorname{ctg} x$ строго убывает на каждом интервале

$$(\pi n; \pi + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

6. Экстремальные значения: нет.

7. Для всех допустимых x : $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$.

Графики функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ приведены на рис. 1.4 и 1.5 соответственно.

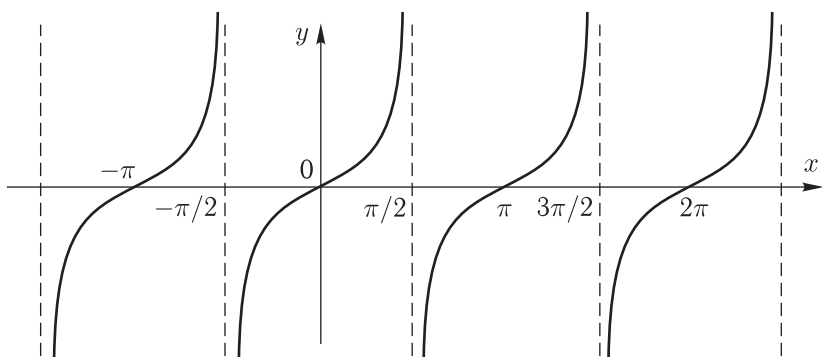


Рис. 1.4. График функции $y = \operatorname{tg} x$

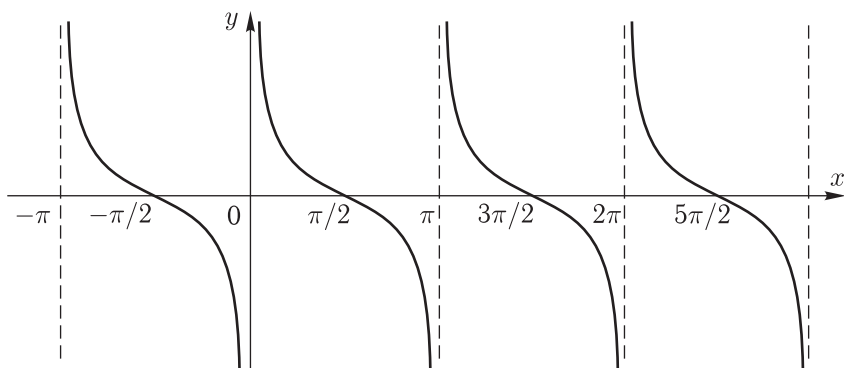


Рис. 1.5. График функции $y = \operatorname{ctg} x$

1.1.3. Функции секанс и косеканс

Функции *секанс* $y = \sec x$ и *косеканс* $y = \operatorname{cosec} x$ определяются формулами:

$$\begin{aligned}\sec x &= \frac{1}{\cos x}, & x &\neq \frac{\pi}{2} + \pi n, & \forall n \in \mathbb{Z}; \\ \operatorname{cosec} x &= \frac{1}{\sin x}, & x &\neq \pi n, & \forall n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Свойства функций $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$

1. Область определения:

$$\begin{aligned}D(\sec x) &= \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \forall n \in \mathbb{Z} \right\}; \\ D(\operatorname{cosec} x) &= \{ x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq \pi n, \forall n \in \mathbb{Z} \}.\end{aligned}$$

2. Область значений: $E(\sec x) = E(\operatorname{cosec} x) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.
3. Периодичность: периодические с периодом 2π .
4. Четность и нечетность: $\sec x$ — четная функция, $\operatorname{cosec} x$ — нечетная.
5. Интервалы монотонности: $\sec x$ убывает на каждом интервале

$$\left(-\pi + 2\pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right), \quad \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z};$$

и возрастает на каждом интервале

$$\left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right), \quad \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z};$$

$\operatorname{cosec} x$ убывает на каждом интервале

$$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n \right), \quad \left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z};$$

и возрастает на интервалах

$$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n \right), \quad \left(\pi + 2\pi n; \frac{3}{2}\pi + 2\pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

6. Локальные экстремумы:

$\sec x = 1$ в точках локального минимума $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$,

$\sec x = -1$ в точках локального максимума $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

$\operatorname{cosec} x = 1$ в точках локального минимума $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$,

$\operatorname{cosec} x = -1$ в точках локального максимума $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Графики функций $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$ приведены на рис. 1.6 и 1.7 соответственно.

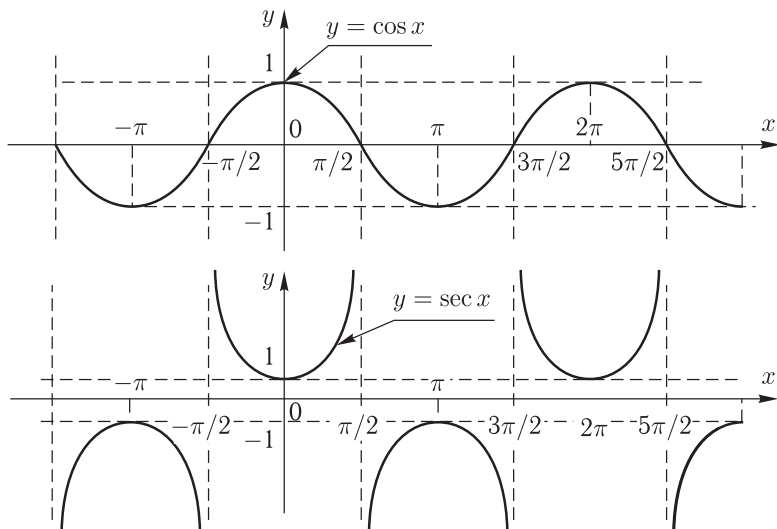


Рис. 1.6. Графики функции $\cos x$ и $\sec x$

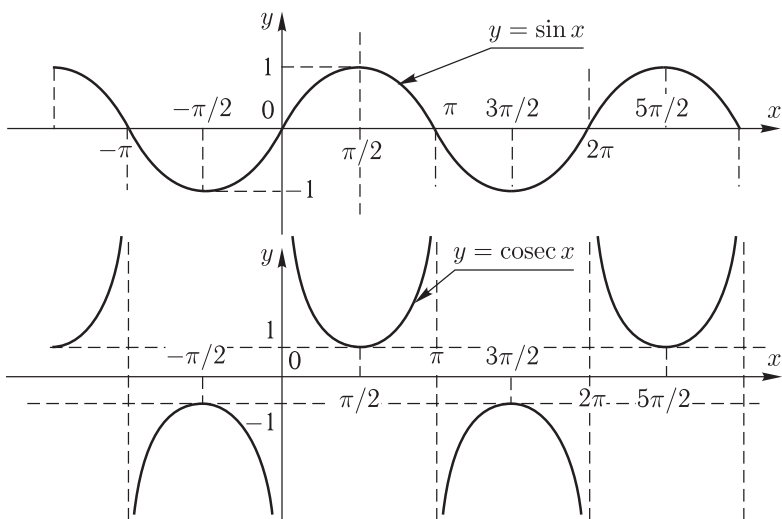


Рис. 1.7. Графики функции $\sin x$ и $\operatorname{cosec} x$

1.1.4. Знаки тригонометрических функций

(рис. 1.8)

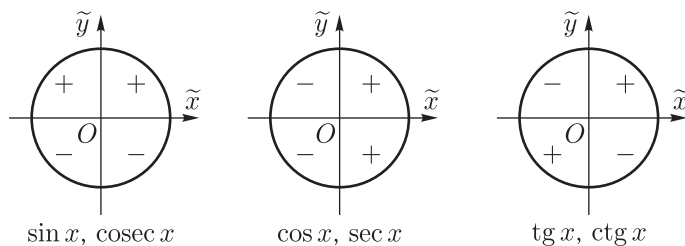


Рис. 1.8

1.1.5. Формулы приведения

Формулы приведения (табл. 1.1 и 1.2) позволяют выразить значения тригонометрических функций *произвольного аргумента* x через значения тригонометрических функций угла $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, лежащего в первой четверти. Однако эти формулы справедливы для *любого допустимого значения* аргумента α .

Таблица 1.1

Формулы приведения для функций с периодом 2π

Тригонометрическая функция	Угол						
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3}{2}\pi - \alpha$	$\frac{3}{2}\pi + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\sec x$	$\operatorname{cosec} \alpha$	$-\operatorname{cosec} \alpha$	$-\sec \alpha$	$-\sec \alpha$	$-\operatorname{cosec} \alpha$	$\operatorname{cosec} \alpha$	$\sec \alpha$
$\operatorname{cosec} \alpha$	$\sec \alpha$	$\sec \alpha$	$\operatorname{cosec} \alpha$	$-\operatorname{cosec} \alpha$	$-\sec \alpha$	$-\sec \alpha$	$-\operatorname{cosec} \alpha$

Таблица 1.2

Формулы приведения для функций с периодом π

Тригонометрическая функция	Угол		
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$
tg	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
ctg	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

Для вычисления значений тригонометрических функций произвольного аргумента x при $x > \pi/2$ рекомендуется руководствоваться следующим алгоритмом.

1. Если аргумент x функции $\sin x$ или $\cos x$ больше 2π , т. е. $x = t + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, где $0 \leq t < 2\pi$, то переходят к этой же функции аргумента t :

$$\sin(t + 2\pi n) = \sin t; \quad \cos(t + 2\pi n) = \cos t.$$

В этом случае говорят, что «отбрасывают» наибольшую кратную числу 2π часть числа x .

Аналогично для функции $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$: если $x > \pi$, т. е. $x = t + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, где $0 \leq t < \pi$, то переходят к $\operatorname{tg} t$ или $\operatorname{ctg} t$: $\operatorname{tg}(t + \pi n) = \operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg}(t + \pi n) = \operatorname{ctg} t$.

2. Если $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$, то дополнительные преобразования не требуются. Если же $\frac{\pi}{2} < t \leq 2\pi$, то это число можно представить, в зависимости от t , в одном из следующих видов: $\frac{\pi}{2} + \alpha$; $\pi \pm \alpha$; $\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$; $2\pi - \alpha$, где $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2})$. Затем необходимо воспользоваться формулами приведения (табл. 1.1, 1.2).

3. Запоминать формулы приведения в виде набора тождеств из табл. 1.1 и 1.2 неудобно и нецелесообразно. Рекомендуется использовать следующие правила:

а) при суммировании с углом $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3}{2}\pi$ («переходе» через угол) наименование тригонометрической функции меняется на кофункцию ($\sin$ на $\cos$, $\cos$ на $\sin$, $\sec$ на cosec , cosec на $\sec$, tg на ctg , ctg на tg), при суммировании с углом π или 2π наименование функции сохраняется;

б) знак перед приведенной функцией определяется знаком приводимой функции в зависимости от четверти, которой принадлежит ее аргумент t (см. п. 1.1.4).

Например, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$. Наименования функций изменены на кофункции, так как аргумент $t = \frac{\pi}{2} + \alpha$ содержит слагаемое $\frac{\pi}{2}$. Знаки в правых частях формул соответствуют знакам функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ соответственно во второй четверти.

Пример 1.1. Вычислите: а) $\sin 570^\circ$; б) $\cos 420^\circ$; в) $\operatorname{tg} 750^\circ$; г) $\sin 1140^\circ$; д) $\operatorname{ctg} 1035^\circ$; е) $\sin \frac{23}{6}\pi$; ж) $\cos \frac{20}{3}\pi$; з) $\operatorname{tg} \frac{29}{4}\pi$.

Р е ш е н и е.

$$\text{а) } \sin 570^\circ = \sin(360^\circ + 210^\circ) = \sin 210^\circ = \\ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$\text{б) } \cos 420^\circ = \cos(360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\text{в) } \operatorname{tg} 750^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ \cdot 4 + 30^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\text{г) } \sin 1140^\circ = \sin(360^\circ \cdot 3 + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{д) } \operatorname{ctg} 1035^\circ = \operatorname{ctg}(180^\circ \cdot 5 + 135^\circ) = \\ = \operatorname{ctg} 135^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ + 45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1;$$

$$\text{е) } \sin \frac{23}{6}\pi = \sin\left(2\pi + \frac{5}{6}\pi\right) = \sin \frac{5}{6}\pi = \\ = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$\text{ж) } \cos \frac{20}{3}\pi = \cos\left(3 \cdot 2\pi + \frac{2}{3}\pi\right) = \\ = \cos \frac{2}{3}\pi = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2};$$

$$\text{з) } \operatorname{tg} \frac{29}{4}\pi = \operatorname{tg}\left(7\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

$$\text{Ответ: а) } -\frac{1}{2}; \text{ б) } \frac{1}{2}; \text{ в) } \frac{\sqrt{3}}{3}; \text{ г) } \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ д) } -1; \text{ е) } -\frac{1}{2}; \text{ ж) } -\frac{1}{2}; \text{ з) } 1.$$

1.1.6. Некоторые значения тригонометрических функций

В задачах тригонометрии и в ее приложениях часто встречаются значения тригонометрических функций для углов $\frac{\pi}{6}n$, $n = 0, 1, 2, \dots, 12$, и $\frac{\pi}{4}m$, $m = 1, 3, 5, 7$. Это связано с тем, что значения тригонометрических функций для этих углов имеют достаточно простые по форме записи числовые значения. Они приведены в табл. 1.3 для углов (значений аргумента) $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$. Для нахождения значений тригонометрических функций в углах $\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi$ и т. д. необходимо использовать формулы приведения.

Иногда возникает необходимость вычисления значений тригонометрических функций аргументов $\frac{\pi}{12}$ (15°), $\frac{\pi}{10}$ (18°), $\frac{\pi}{5}$ (36°) и других. Однако запоминать эти значения, например,

$$\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \cos \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}},$$

Таблица 1.3

Функция	Аргумент				
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не определен
$\operatorname{ctg} \alpha$	не определен	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{cosec} \alpha$	не определен	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
$\sec \alpha$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	не определен

сложно и нецелесообразно. Их необходимо уметь вычислять с помощью формул тригонометрии (см. разд. 2, примеры 2.17 и 2.18).

Значения тригонометрических функций, приведенные в табл. 1.3, разумеется, необходимо знать наизусть.

1.2. Задачи на свойства тригонометрических функций

1.2.1. Связь градусной и радианной мер угла

Напомним, что радианной мерой x угла AOB , вписанного в окружность радиусом R и с центром в точке O — вершине угла AOB , — называется отношение длины ℓ дуги AB , на которую опирается этот угол, к радиусу R (рис. 1.9):

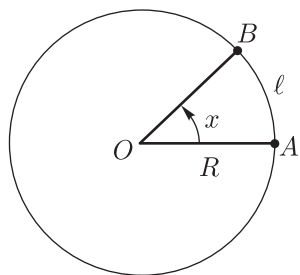


Рис. 1.9

$$x = \frac{\ell}{R}.$$

В соответствии с этим определением углом в 1 радиан будет угол, опирающийся на дугу AB , длина ℓ которой равна радиусу R , т. е. $\ell = R$. Углу 180° отвечает π радиан, поэтому углу 1 радиан соответствует $\frac{180^\circ}{\pi} \cong 57^\circ 17' 45''$.

Если α — мера угла в градусах, то перевод в радианную меру осуществляется по формуле

$$x \text{ (рад)} = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \cdot \pi. \quad (1.4)$$

Перевод из радианной меры x угла в градусы осуществляется соответственно по формуле

$$\alpha^\circ = \frac{x \cdot 180^\circ}{\pi}. \quad (1.5)$$

Эти формулы часто забываются абитуриентами. Однако их довольно легко вывести, воспользовавшись пропорциями:

$$180^\circ : \alpha^\circ = \pi : x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\alpha^\circ \cdot \pi}{180^\circ}; \quad \alpha^\circ = \frac{x \cdot 180^\circ}{\pi}.$$

Заметим, что аналогично можно вспомнить формулы площади $S = \frac{1}{2}R^2\alpha$ сектора радиусом R с центральным углом α и длины дуги сектора (сегмента) $\ell = R\alpha$. Для этого достаточно помнить площадь круга $S = \pi R^2$ и длину окружности $L = 2\pi R$. Действительно,

$$\begin{aligned} \pi R^2 : S_{\text{сект}} = 2\pi : \alpha \text{ (рад)} &\Leftrightarrow S_{\text{сект}} = \frac{\alpha \cdot \pi R^2}{2\pi} = \frac{1}{2}R^2\alpha, \\ 2\pi R : 2\pi = \ell : \alpha &\Leftrightarrow \ell = \frac{\alpha \cdot 2\pi R}{2\pi} = R\alpha. \end{aligned}$$

Пример 1.2. Переведите из градусной в радианную меру углы: 5° , 10° , 15° , 18° , 20° , 25° , 30° , 36° , 40° , 45° , 60° , 70° , 72° , 75° , 80° , 90° .

Решение. Воспользовавшись формулами (1.4), получим:

α°	5°	10°	15°	18°	20°	25°	30°	36°
$x_{\text{рад}}$	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{5}{36}\pi$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$

α°	40°	45°	60°	70°	72°	75°	80°	90°
$x_{\text{рад}}$	$\frac{2}{9}\pi$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7}{18}\pi$	$\frac{2}{5}\pi$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{4}{9}\pi$	$\frac{\pi}{2}$

Пример 1.3. Дан сектор радиусом $\frac{8}{\pi}$ с центральным углом $22^\circ 30'$. Найдите длину дуги сектора и его площадь.

Решение. В формулах площади сектора и длины дуги угол α дан в радианах, поэтому находим α (рад) = $\frac{45^\circ}{180^\circ} \cdot \pi = \frac{\pi}{8}$ 1).

$$\text{Тогда } \ell = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{\pi}{8} = 1; S_{\text{сект}} = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{\pi} \right)^2 \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{4}{\pi}.$$

$$\text{Ответ: } \ell = 1; S = \frac{4}{\pi}.$$

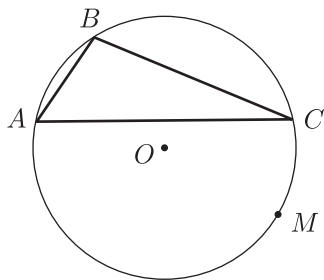


Рис. 1.10

Пример 1.4. Вершины вписанного треугольника делят окружность на части в отношении 3 : 5 : 10. Найдите внутренние углы треугольника.

Решение. $3 + 5 + 10 = 18$, $360^\circ : 18 = 20^\circ$.

Дуги AB , BC и AMC (рис. 1.10) содержат соответственно $20^\circ \cdot 3 = 60^\circ$; $20^\circ \cdot 5 = 100^\circ$; $20^\circ \cdot 10 = 200^\circ$.

Как известно, угол, вписанный в окружность, равен половине отвечающего ему центрального угла, или

половине градусной меры дуги, на которую он опирается. Поэтому

$$\angle A = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} 100^\circ = 50^\circ, \quad \text{или} \quad \frac{5}{18} \pi;$$

$$\angle B = \frac{1}{2} AMC = \frac{1}{2} 200^\circ = 100^\circ, \quad \text{или} \quad \frac{5}{9} \pi;$$

$$\angle C = 180^\circ - (50^\circ + 100^\circ) = 30^\circ, \quad \text{или} \quad \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{5}{18} \pi; \frac{5}{9} \pi; \frac{\pi}{6}.$$

При решении задач с тригонометрическими функциями, особенно с обратными тригонометрическими функциями, часто приходится определять положение числа x (соответствующего углу x радиан) на числовой прямой относительно чисел вида $\frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 1.5. Укажите отрезки вида $\left[\frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{2}(n+1) \right]$, $n \in \mathbb{Z}$, которым принадлежат числа: а) 4; б) $\frac{9}{2}$; в) 6; г) 8; д) 13; е) 15,

1) $30' = \frac{1^\circ}{2}$, поэтому $22^\circ 30' = 22\frac{1}{2}^\circ = \frac{45^\circ}{2}$.

и отметьте на тригонометрической окружности точки, отвечающие этим числам.

Решение. Натуральное число n , при котором заданное действительное число x принадлежит отрезку $\left[\frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{2}(n+1)\right]$, может быть найдено различными способами. Однако все они основаны на замене числа π ($\pi = 3,141592653\dots$) или градусной меры $\alpha(1)$ одного радиана ($\alpha(1) = 57,295779513\dots^\circ$) его приближенным значением.

Способ 1. Умножив равенство $\frac{2}{\pi} = 0,636619772\dots$ на $\frac{\pi}{2}$, получим $1 = 0,636619772\dots \cdot \frac{\pi}{2}$. Это равенство позволяет записать неравенства

$$0,63\frac{\pi}{2} < 1 < 0,64\frac{\pi}{2}; \quad 0,636\frac{\pi}{2} < 1 < 0,637\frac{\pi}{2}; \\ 0,63661\frac{\pi}{2} < 1 < 0,63662\frac{\pi}{2} \quad \text{и т. д.}$$

Эти неравенства различаются точностью, с которой оценивается число 1. Для решения задач данного примера, как увидим сейчас, достаточно первой оценки: $0,63\frac{\pi}{2} < 1 < 0,64\frac{\pi}{2}$.

а) Умножив двойное неравенство $0,63\frac{\pi}{2} < 1 < 0,64\frac{\pi}{2}$ на 4, получим $2,52\frac{\pi}{2} < 4 < 2,56\frac{\pi}{2}$.

Интервал $\left(2,52\frac{\pi}{2}; 2,56\frac{\pi}{2}\right)$ содержится в отрезке $\left[2\frac{\pi}{2}; 3\frac{\pi}{2}\right] = \left[\pi; \frac{3}{2}\pi\right]$ и потому $4 \in \left[\pi; \frac{3}{2}\pi\right]$.

$$\text{б) } \frac{9}{2} \cdot 0,63\frac{\pi}{2} < \frac{9}{2} < \frac{9}{2} \cdot 0,64\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2,835\frac{\pi}{2} < \frac{9}{2} < 2,880\frac{\pi}{2}.$$

Интервал $\left(2,835\frac{\pi}{2}; 2,880\frac{\pi}{2}\right)$ содержится в отрезке $\left[2\frac{\pi}{2}; 3\frac{\pi}{2}\right]$; следовательно, $\frac{9}{2} \in \left[\pi; \frac{3}{2}\pi\right]$.

$$\text{в) } 6 \cdot 0,63\frac{\pi}{2} < 6 < 6 \cdot 0,64\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 3,78\frac{\pi}{2} < 6 < 3,84\frac{\pi}{2}.$$

Для нахождения искомого значения n можно взять целые части чисел 3,78 и 3,84 ($[3,78] = 3$, $[3,84] = 3$); поскольку они в данном случае равны, то $n = 3$. Таким образом, здесь $6 \in \left[3\frac{\pi}{2}; 4\frac{\pi}{2}\right]$. В противном случае — целые части чисел в левой и правой частях двойного неравенства не равны — нужно использовать

более точную оценку числа 1 в виде двойного неравенства (см. ниже замечание 1 к данному примеру).

$$\text{г) } 8 \cdot 0,63 \frac{\pi}{2} < 8 < 8 \cdot 0,64 \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 5,04 \frac{\pi}{2} < 8 < 5,12 \frac{\pi}{2}; [5,04] = [5,12] = 5 \Rightarrow n = 5 \text{ и } 8 \in \left[5 \frac{\pi}{2}; 6 \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\text{д) } 13 \cdot 0,63 \frac{\pi}{2} < 13 < 13 \cdot 0,64 \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 8,19 \frac{\pi}{2} < 13 < 8,32 \frac{\pi}{2}; [8,19] = [8,32] = 8 \Rightarrow n = 8 \text{ и } 13 \in \left[8 \frac{\pi}{2}; 9 \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\text{е) } 15 \cdot 0,63 \frac{\pi}{2} < 15 < 15 \cdot 0,64 \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 9,45 \frac{\pi}{2} < 15 < 9,60 \frac{\pi}{2}; [9,45] = [9,60] = 9 \Rightarrow n = 9 \text{ и } 15 \in \left[9 \frac{\pi}{2}; 10 \frac{\pi}{2}\right].$$

Способ 2 основан на использовании приближенного значения градусной меры $\alpha(1)$ одного радиана: $\alpha(1) \approx 57^\circ 17' 45''$, или $\alpha(1) = 57,295779 \dots^\circ$. Последнее равенство позволяет записать неравенства:

$$57,2^\circ < \alpha(1) < 57,3^\circ; \quad 57,29^\circ < \alpha(1) < 57,30^\circ; \\ 57,295^\circ < \alpha(1) < 57,296^\circ \quad \text{и т. д.}$$

Эти оценки отличаются точностью локализации числа $\alpha(1)$. Задачи данного примера успешно решаются с помощью первой грубой оценки $\alpha(1)$: $57,2^\circ < \alpha(1) < 57,3^\circ$.

Рассмотрим некоторые задачи примера 1.4.

$$\text{а) } 4 \cdot 57,2^\circ < 4\alpha(1) < 4 \cdot 57,3^\circ \Leftrightarrow 228,8^\circ < 4\alpha(1) < 229,2^\circ.$$

Интервал $(228,8^\circ; 229,2^\circ)$ содержится в отрезке $[180^\circ; 270^\circ]$, и потому $4\alpha(1) \in [180^\circ; 270^\circ]$, или $4 \in \left[\pi; \frac{3}{2}\pi\right]$;

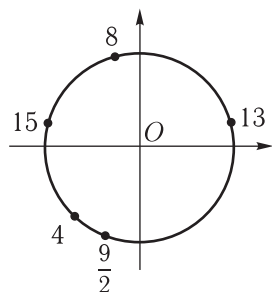


Рис. 1.11

$$\text{в) } 6 \cdot 57,2^\circ < 6\alpha(1) < 6 \cdot 57,3^\circ \Leftrightarrow 343,2^\circ < 6\alpha(1) < 343,8^\circ.$$

Нетрудно видеть, что интервал $(343,2^\circ; 343,8^\circ)$ содержится в отрезке $[270^\circ; 360^\circ] = [3 \cdot 90^\circ; 4 \cdot 90^\circ]$, т. е. $n = 3$ и $6 \in \left[\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right]$.

$$\text{г) } 15 \cdot 57,2^\circ < 15\alpha(1) < 15 \cdot 57,3^\circ \Leftrightarrow 858,0^\circ < 15\alpha(1) < 859,5^\circ.$$

Для определения n вычисляем целые части чисел: $\left[\frac{858^\circ}{90^\circ}\right] = 9$ и $\left[\frac{859,5^\circ}{90^\circ}\right] = 9$.

Поскольку оба значения совпали ($9 = 9$), то $15\alpha(1) \in [9 \cdot 90^\circ; 10 \cdot 90^\circ]$, т. е. $15 \in \left[\frac{9}{2}\pi; 5\pi\right]$.

Расположение чисел $4, \frac{9}{2}, 6, 8, 13, 15$ на единичной окружности приведено на рис. 1.11.

Ответ: а) $\left[\pi; \frac{3}{2}\pi\right]$; б) $\left[\pi; \frac{3}{2}\pi\right]$; в) $\left[\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right]$; г) $\left[\frac{5}{2}\pi; 3\pi\right]$; д) $\left[4\pi; \frac{9}{2}\pi\right]$; е) $\left[\frac{9}{2}\pi; 15\pi\right]$.

Замечания к примеру 1.5.

1. Если число x расположено «близко» к некоторому числу $\frac{\pi}{2}n$, то может потребоваться большая точность локализации числа 1 (рад) или $\alpha(1)$ (градусная мера одного радиана).

Поясним это утверждение следующим примером. Пусть $x = 11$. Тогда

$$11 \cdot 57,2^\circ < 11\alpha(1) < 11 \cdot 57,3^\circ \Leftrightarrow 629,2^\circ < 11\alpha(1) < 630,3^\circ.$$

Но интервал $(629,2^\circ; 630,3^\circ)$ не содержится ни в одном отрезке вида $\left[\frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{2}(n+1)\right]$. Действительно, $\left[\frac{629,2^\circ}{90^\circ}\right] = 6$, а $\left[\frac{630,3^\circ}{90^\circ}\right] = 7$. Это означает, что для нахождения искомого значения n (отрезка $\left[\frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{2}(n+1)\right]$) необходимо повысить точность локализации числа $\alpha(1)$.

Пусть $57,29^\circ < \alpha(1) < 57,30^\circ$, тогда

$$11 \cdot 57,29^\circ < 11 \cdot \alpha(1) < 11 \cdot 57,30^\circ \Leftrightarrow 630,19^\circ < 11\alpha(1) < 630,3^\circ.$$

Интервал $(630,19^\circ; 630,3^\circ)$ содержится в отрезке

$$[630^\circ; 720^\circ], \text{ т. е. } 11 \in \left[7\frac{\pi}{2}; 8\frac{\pi}{2}\right], \text{ или } 11 \in \left[\frac{7}{2}\pi; 4\pi\right].$$

Действительно, здесь

$$\left[\frac{630,19^\circ}{90^\circ}\right] = \left[\frac{630,3^\circ}{90^\circ}\right] = 7.$$

2. В тех случаях, когда число x значительно отличается от ближайших к нему чисел $\frac{\pi}{2}n$ и $\frac{\pi}{2}(n+1)$ и n не слишком велико ($n \sim 10$), можно использовать упрощенный алгоритм поиска соответствующего отрезка $\left[\frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{2}(n+1)\right]$.

Например, исходя из приближенной оценки $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$, подбором n легко устанавливается, что

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1,57 < 6 < 4 \cdot 1,57 &\Rightarrow 6 \in \left[\frac{3}{2}\pi; 2\pi \right]; \\ 5 \cdot 1,57 < 8 < 6 \cdot 1,57 &\Rightarrow 6 \in \left[\frac{5}{2}\pi; 3\pi \right], \\ 9 \cdot 1,57 < 13 < 10 \cdot 1,57 &\Rightarrow 13 \in \left[\frac{9}{2}\pi; 5\pi \right] \text{ и т. п.} \end{aligned}$$

Разумеется, если число x близко к некоторому числу $\frac{\pi}{2}n$, то такой способ может приводить к ошибкам.

Пример 1.6. Определите знак числа $\cos 11$.

Решение. Легко установить, что число 11 принадлежит интервалу $(3\pi; 4\pi)$. Знак числа $\cos 11$ будет зависеть от сравнения 11 с $\frac{7}{2}\pi$. Если $11 < \frac{7}{2}\pi$, то $\cos 11 < 0$, а если $11 > \frac{7}{2}\pi$, то $\cos 11 > 0$. Отметим, что равенство $\frac{7}{2}\pi = 11$ невозможно (почему?).

Поскольку $3,142 > \pi$, то $\frac{7}{2} \cdot 3,142 > \frac{7}{2}\pi$, или $10,997 > \frac{7}{2}\pi$. Отсюда следует, что $11 > \frac{7}{2}\pi$ и соответственно $\cos 11 > 0$.

Ответ: число $\cos 11$ положительное.

1.2.2. Вычисление значений тригонометрических функций

Пример 1.7. Вычислите

$$\sin 870^\circ \cdot \operatorname{cosec} 570^\circ + \cos 690^\circ \cdot \operatorname{ctg} 570^\circ.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \sin 870^\circ &= \sin(2 \cdot 360^\circ + 150^\circ) = \sin 150^\circ = \\ &= \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \\ \operatorname{cosec} 570^\circ &= \operatorname{cosec}(360^\circ + 210^\circ) = \operatorname{cosec} 210^\circ = \\ &= \operatorname{cosec}(180^\circ + 30^\circ) = -\operatorname{cosec} 30^\circ = -2; \\ \cos 690^\circ &= \cos(360^\circ + 330^\circ) = \cos 330^\circ = \\ &= \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \operatorname{ctg} 570^\circ &= \operatorname{ctg}(180^\circ \cdot 3 + 30^\circ) = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Имеем $\frac{1}{2}(-2) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 1.8. Вычислите $\cos^2\left(\frac{21}{2}\pi - 2\right) + \sin^2\left(2 - \frac{183}{2}\pi\right)$.

Решение. По формулам приведения

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{21}{2}\pi - 2\right) &= \cos\left(5 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} - 2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\right) = \sin 2; \\ \sin\left(2 - \frac{183}{2}\pi\right) &= -\sin\left(\frac{183}{2}\pi - 2\right) = -\sin\left(45 \cdot 2\pi + \frac{3}{2}\pi - 2\right) = \\ &= -\sin\left(\frac{3}{2}\pi - 2\right) = -(-\cos 2) = \cos 2.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\cos^2\left(\frac{21}{2}\pi - 2\right) + \sin^2\left(2 - \frac{183}{2}\pi\right) = \sin^2 2 + \cos^2 2 = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 1.9. Определите знак числа

$$A = \cos 755^\circ \cdot \sec 943^\circ \cdot \operatorname{tg} 284^\circ \cdot \operatorname{ctg} 989^\circ.$$

Решение. $\cos 755^\circ = \cos(360^\circ \cdot 2 + 35^\circ) = \cos 35^\circ > 0$;
 $\sec 943^\circ = \sec(360^\circ \cdot 2 + 223^\circ) = \sec 223^\circ < 0$; $\operatorname{tg} 284^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 104^\circ) = \operatorname{tg} 104^\circ < 0$; $\operatorname{ctg} 989^\circ = \operatorname{ctg}(180^\circ \cdot 5 + 89^\circ) = \operatorname{ctg} 89^\circ > 0$.

Таким образом, в рассматриваемом произведении два числа положительны, а два отрицательны, поэтому $A > 0$.

Ответ: $A > 0$.

Пример 1.10. Вычислите

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{\sin^2 1120^\circ - \operatorname{cosec} 510^\circ \sin 405^\circ \cos 50^\circ + \sin 870^\circ +} \\ &\quad + \operatorname{tg} 580^\circ \cdot \cos 760^\circ.\end{aligned}$$

Решение. Выполнив необходимые преобразования, получим:

$$\sin 1120^\circ = \sin 40^\circ; \quad \operatorname{cosec} 510^\circ = \operatorname{cosec} 150^\circ = 2;$$

$$\sin 405^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos 50^\circ = \sin 40^\circ;$$

$$\sin 870^\circ = \sin 150^\circ = \frac{1}{2}; \quad \operatorname{tg} 580^\circ = \operatorname{tg} 40^\circ; \quad \cos 760^\circ = \cos 40^\circ.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\sin^2 40^\circ - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 40^\circ + \frac{1}{2}} + \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \cos 40^\circ = \\ &= \sqrt{\left(\sin 40^\circ - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \sin 40^\circ = \left|\sin 40^\circ - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| + \sin 40^\circ. \end{aligned}$$

Но $\sin 40^\circ < \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, поэтому

$$\left|\sin 40^\circ - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin 40^\circ,$$

и окончательно имеем

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin 40^\circ + \sin 40^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.2.3. Четность и нечетность тригонометрических функций

Решение задач данного пункта основано на использовании определений четной и нечетной функций и свойств таких функций.

Определение 1.5. Функция $y = f(x)$, $x \in X$, называется *четной*, если:

а) область X определения (задания) функции $f(x)$ симметрична относительно точки $x = 0$;

б) для любого $x \in X$: $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$, $x \in X$ называется *нечетной*, если:

а) область X определения (задания) функции $f(x)$ симметрична относительно точки $x = 0$;

б) для любого $x \in X$: $f(-x) = -f(x)$.

Свойства четных и нечетных функций

1. Сумма, разность и произведение четных функций $f(x)$ и $g(x)$ на множестве X также являются четными функциями на X .
2. Сумма и разность двух нечетных функций $f(x)$ и $g(x)$ на множестве X являются нечетными функциями на X .
3. Произведение двух нечетных функций на множестве X — четная функция на X .

4. Произведение четной и нечетной функций на множестве X является нечетной функцией на X .
5. График четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала системы координат.
6. Всякую функцию $f(x)$, $x \in X$, с областью определения (задания) X , симметричной относительно точки $x = 0$, можно представить в виде суммы четной $f_1(x)$ и нечетной $f_2(x)$ функций:

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

7. Производная $f'(x)$ четной функции $f(x)$, $x \in X$, является нечетной функцией на X ; производная $f'(x)$ нечетной функции $f(x)$, $x \in X$, является четной функцией на X .
8. Функция $y = c$, $c \in \mathbb{R}$, является четной для любого $c \neq 0$. Функция $y = 0$ ($c = 0$) является одновременно четной и нечетной.

Пример 1.11. Установите, какие из приведенных функций являются четными или нечетными:

- а) $y = \sin 3x$, $x \in [-100\pi; 102\pi]$;
- б) $y = \cos \frac{x}{2} \cdot |\operatorname{tg} x|$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
- в) $y = \sin(x^2 + 4)$, $x \in \mathbb{R}$;
- г) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in \mathbb{R}$; $x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
- д) $y = (x^3 - x) \cdot \operatorname{ctg} x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
- е) $y = \cos x \cdot \operatorname{ctg} x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. а) Отрезок $[-100\pi; 102\pi]$ не симметричен относительно точки $x = 0$, поэтому функция $\sin 3x$ на указанном промежутке не является ни четной, ни нечетной;

- б) четная как произведение двух четных функций;
 - в) четная, так как область задания симметрична относительно точки $x = 0$ и $\sin((-x)^2 + 4) = \sin(x^2 + 4)$ для всех $x \in \mathbb{R}$;
 - г) ни четная, ни нечетная, так как область определения не симметрична относительно точки $x = 0$;
 - д) четная как произведение двух нечетных функций;
 - е) нечетная как произведение четной и нечетной функций.
- Ответ:** четные — б), в), д); нечетные — е).

Пример 1.12. Установите, при каких значениях параметров a и b приведенные функции являются четными:

- а) $y = a \sin x + b \cos x$, $x \in \mathbb{R}$;
 б) $y = a \sin^2 x + b \operatorname{tg} |x|$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
 в) $y = a \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} + b \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$; $x \neq \frac{\pi}{2} n$, $n \in \mathbb{Z}$;
 г) $y = a \cos \sqrt{|x| - 1} + b \sqrt[3]{x} \sin \sqrt[3]{x^2}$, $|x| \geq 1$;
 д) $y = a \cos \sqrt{|x - 1|} + b \sqrt[3]{x} \sin \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Решение. а) $y_1 = a \sin x$ — четная функция только при $a = 0$, $y_2 = b \cos x$ — четная функция для всех $b \in \mathbb{R}$.

Поэтому функция $y = a \sin x + b \cos x$ будет четной при $a = 0$, $b \in \mathbb{R}$;

б) четная для любых $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ как сумма двух четных функций;

в) область определения функции симметрична относительно нуля; функция $y_1 = a \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = a \cos x$ является четной на множестве $X = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} n\}$; функция $y_2 = b \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x} = b \frac{\cos x}{\sin^2 x}$ также является четной на указанном множестве (как произведение двух четных функций $\cos x$ и $\frac{1}{\sin^2 x}$). Поэтому функция $y = a \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} + b \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x}$ является четной на ее естественной области определения для всех $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$;

г) функция $y_1(x) = a \cos \sqrt{|x| - 1}$ является четной на множестве $|x| \geq 1$; функция $y_2(x) = b \sqrt[3]{x} \sin \sqrt[3]{x^2}$ — нечетная как произведение нечетной функции $\sqrt[3]{x}$ и четной $\sin \sqrt[3]{x^2}$, она является четной только при $b = 0$. Поэтому функция $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ будет четной при $a \in \mathbb{R}$, $b = 0$;

д) функция $y = a \cos \sqrt{|x - 1|} + b \sqrt[3]{x} \sin \sqrt[3]{x}$ будет четной только при $a = 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Ответ: а) $a = 0$, $b \in \mathbb{R}$; б) $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$; в) $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$; г) $a \in \mathbb{R}$, $b = 0$; д) $a = 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Пример 1.13. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$2^{|x|} - 2(a^2 - 1) \sin |x| + a^2 - 2 = 0$$

имеет единственное решение.

Решение. Рассмотрим функцию

$$y(x) = 2^{|x|} - 2(a^2 - 1) \sin |x| + a^2 - 2.$$

Она определена для всех $x \in \mathbb{R}$ и является линейной комбинацией четных функций $2^{|x|}$ и $\sin |x|$, поэтому $y(x)$ — четная функция. Если уравнение $y(x) = 0$ имеет единственное решение, то это $x = 0$. Действительно, если $x = x_0$, $x_0 \neq 0$ — решение уравнения $y(x) = 0$, где $y(x)$ — четная функция, то $x = -x_0$ также будет решением этого уравнения ($y(-x_0) = y(x_0) = 0$).

При $x = 0$ исходное уравнение принимает следующий вид:

$$a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1.$$

Покажем, что при $a = \pm 1$ других решений уравнение не имеет. Полагая $a = \pm 1$ в исходном уравнении, получаем

$$2^{|x|} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^{|x|} = 2^0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: $a = \pm 1$.

Замечания к примеру 1.13.

Имеется достаточно большое число примеров, решение которых строится на использовании свойств корней уравнений $f(x) = 0$, где $f(x)$ — четная или нечетная функция.

1. Если в уравнении $f(x) = 0$ функция $f(x)$ — четная, то уравнение в общем случае имеет четное число корней; нечетное число корней такое уравнение может иметь лишь в том случае, когда $x = 0$ является корнем такого уравнения.

2. Если уравнение $f(x) = 0$, где $f(x)$ — непрерывная нечетная функция, имеет корни, то их количество является нечетным числом.

1.2.4. Периодичность тригонометрических функций

Решение задач данного пункта основано на определении и свойствах периодической функции.

При изложении свойств периодических функций нам потребуется понятие соизмеримых величин. Напомним его: две однородные величины (длины, площади и т. п.) называются *соизмеримыми*, если их отношение выражается рациональным числом. Таким образом, числа $T_1, T_2 \in \mathbb{R}^+$ соизмеримы, если существуют такие взаимно простые числа $m, n \in \mathbb{N}$, что $T_1/T_2 = m/n$, или $nT_1 = mT_2$.

Определение 1.6. Число $T \neq 0$ называется *периодом* функции $y = f(x)$, $x \in X$, если для любого $x \in X$ значения $x - T$ и $x + T$ также принадлежат X и выполняются равенства

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Функция $f(x)$ в этом случае называется *периодической с периодом T* , или *T -периодической*.

Отметим, что если T — период функции f , то каждое число $\pm 2T, \pm 3T, \dots$, также является периодом этой функции.

Определение 1.7. Наименьший положительный период T (если он существует) будем называть *основным* периодом функции f .

Из определения периодической функции следует, что любое значение y_0 из области значений $E(y)$ периодическая функция принимает *бесконечное число раз*. Поэтому график периодической функции является объединением бесконечного числа следующих друг за другом (периодически повторяющихся) одинаковых фрагментов.

Свойства периодических функций

1. Если функция $f(x)$ периодическая с основным периодом $T > 0$, то функция $f(ax + b)$, $a \neq 0$, также является периодической с основным периодом $T_1 = \frac{T}{|a|}$.

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ — периодические с основными периодами T_1 и T_2 соответственно и при этом числа T_1 и T_2 соизмеримы, то функция $y = af(x) + bg(x)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, также будет периодической с основным периодом T , наименьшим из кратных числам T_1 и T_2 . Если периоды T_1 и T_2 несоизмеримы, то функция y не будет периодической.

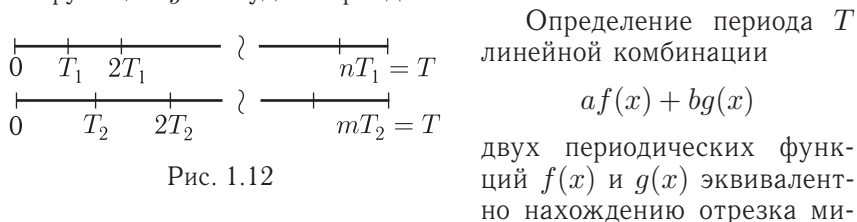


Рис. 1.12

двух периодических функций $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентно нахождению отрезка минимальной длины T , в котором целое число раз укладывается каждый из отрезков длин T_1 и T_2 (рис. 1.12).

3. Если $f(x)$ — дифференцируемая периодическая функция с основным периодом T , то и ее производная $f'(x)$ будет периодической функцией с тем же периодом T .

Прежде чем мы начнем рассматривать примеры исследования функций на периодичность, введем две новые функции.

Функция $y = [x]$, равна наибольшему целому числу, не превосходящему x , называется *целой частью* действительного числа x , или «*антье от x* ». Например, $[5,3] = 5$; $[7,8] = 7$; $[-3,2] = -4$. График функции $y = [x]$ изображен на рис. 1.13.

Отметим важное свойство функции $[x]$: для любых $n \in \mathbb{Z}$ и $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $[n + x] = n + [x]$.

Функция $y = \{x\} \stackrel{\text{def}}{=} x - [x]$ называется *дробной частью* действительного числа x , т.е. дробная часть числа x равна разности между этим числом и его целой частью. Например, $\{5,3\} = 5,3 - 5 = 0,3$; $\{-3,2\} = -3,2 - (-4) = 0,8$. Из определения функции $\{x\}$ следует, что $0 \leq \{x\} < 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$. График функции $y = \{x\}$ изображен на рис. 1.14.

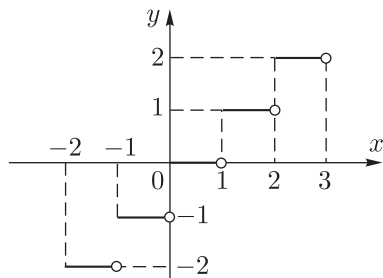


Рис. 1.13

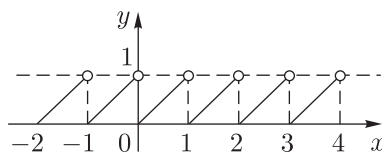


Рис. 1.14

Пример 1.14. Выясните, являются ли периодическими следующие функции: а) $y = [x]$, $x \in \mathbb{R}$; б) $y = \{x\}$, $x \in \mathbb{R}$; в*) $y = x - 10k$, $10k \leq x < 10(k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$; г) $y = \sin x$, $x \in [-100\pi; 100\pi]$, и если да, то определите их основные периоды.

Решение. а) Очевидно, что не существует положительного числа T , такого, что $[x + T] = [x]$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Поэтому функция $y = [x]$ не является периодической.

б) Покажем, что функция $y = \{x\}$ является периодической с основным периодом $T = 1$. В соответствии с определением периодической функции и с учетом свойства функции $[x]$ имеем

$$\{x + 1\} = x + 1 - [x + 1] = x + 1 - ([x] + 1) = x - [x] = \{x\},$$

т.е. $\{x + 1\} = \{x\}$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Легко видеть, что никакое число t , $0 < t < 1$, не может быть периодом данной функции.

в) Функция определена на всей числовой оси. Покажем, что она является периодической с периодом $T = 10$. Пусть

$$x \in [10k; 10(k + 1)),$$

$y = x - 10k$, где $k \in \mathbb{Z}$ — некоторое фиксированное число. Вычислим $y(x + 10)$. Так как $x + 10 \in [10(k + 1); 10(k + 2))$, то

$$y(x + 10) = x + 10 - 10(k + 1) = x + 10 - 10k - 10 = x - 10k = y(x).$$

График функции $y = x - 10k$, $x \in [10k; 10(k + 1))$, $k \in \mathbb{Z}$, изображен на рис. 1.15.

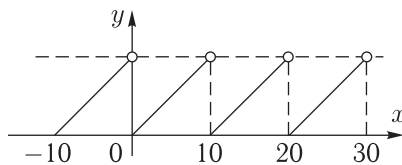


Рис. 1.15

г) Функция $y = \sin x$, $x \in [-100\pi; 100\pi]$, не является периодической, так как множество, на котором задана эта функция, ограничено (отрезок конечной длины), а из определения периодической функции следует, что область ее определения (задания) должна быть неограниченной.

Ответ: а) неперiodическая; б) $T = 1$; в) $T = 10$; г) неперiodическая.

Пример 1.15. Определите основные периоды функций:

а) $y = 3 \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = 2 \cos\left(\frac{2}{5}x + 4\right)$;

в) $y = \operatorname{tg} 6x$; г) $y = 2 \sec\left(\frac{8}{3}x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение. а) $T_y = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$; б) $T_y = \frac{2\pi}{2/5} = 5\pi$; в) $T_y = \frac{\pi}{6}$;

г) $T_y = \frac{2\pi}{8/3} = \frac{3}{4}\pi$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}$; б) 5π ; в) $\frac{\pi}{6}$; г) $\frac{3}{4}\pi$.

Пример 1.16. Определите основной период функции

$$y = 2 \sin 3x + \cos 12x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Решение. $T_{\sin 3x} = \frac{2}{3}\pi$; $T_{\cos 12x} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$.

Тогда $T_y = \frac{2}{3}\pi \cdot n = \frac{\pi}{6}m \Rightarrow n = \frac{m}{4}$.

Наименьшее положительное m , делящееся на 4, равно 4. Поэтому

$$T_y = \frac{\pi}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3}\pi.$$

Ответ: $\frac{2}{3}\pi$.

Пример 1.17. Определите основные периоды функций:

а) $y = \cos \frac{8}{3}x + \sin \frac{12}{5}x$; б) $y = \operatorname{tg} 6x + \sec 8x + \operatorname{ctg} 9x$; в) $y = \sin 2x \cos 2x$.

Решение. а) $T_{\cos(8x/3)} = \frac{2\pi}{8/3} = \frac{3}{4}\pi$; $T_{\sin(12x/5)} = \frac{2\pi}{12/5} = \frac{5}{6}\pi$.

Тогда $T_y = n \cdot \frac{3}{4}\pi = m \cdot \frac{5}{6}\pi \Rightarrow n = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{6}m = \frac{10}{9}m$.

Имеем $m = 9$, $n = 10$ и $T_y = \frac{15}{2}\pi$;

б) $T_{\operatorname{tg} 6x} = \frac{\pi}{6}$; $T_{\sec 8x} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$; $T_{\operatorname{ctg} 9x} = \frac{\pi}{9}$.

Тогда $T_y = \frac{\pi}{6}n = \frac{\pi}{4}m = \frac{\pi}{9}k \Leftrightarrow \frac{n}{6} = \frac{m}{4} = \frac{k}{9}$.

Последние равенства означают, что $n:6$; $m:4$; $k:9$, т.е. $n = 6$, $m = 4$, $k = 9$ и $T_y = \pi$;

в) $y = \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 4x$, $T_y = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{15}{2}\pi$; б) π ; в) $\frac{\pi}{2}$.

Пример 1.18. Определите основной период функции

$$y = \cos^2 8x.$$

Решение. Способ 1.

$$y' = 2 \cos 8x (-\sin 8x) \cdot 8 = -8 \sin 16x \Rightarrow T_{y'} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8} \Rightarrow T_y = \frac{\pi}{8}.$$

Способ 2. Используя формулу понижения степени, получаем

$$y = \frac{1 + \cos 16x}{2} \Rightarrow T_y = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{8}$.

Пример 1.19. Установите, являются ли периодическими функции: а) $y = \cos 4\pi x + \sin 2x$; б) $y = \cos 6x + \sin \sqrt{2}x$; в) $y = \cos 4\pi x + \sin 6\pi x$, и если являются, то найдите основной период каждой из них.

Решение. а) $T_{\cos 4\pi x} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$; $T_{\sin 2x} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Функция $y = \cos 4\pi x + \sin 2x$ не будет периодической, так как равенство $\frac{1}{2}n = \pi m$ невозможно ни при каких рациональных n и m , кроме $n = m = 0$;

$$\text{б) } T_{\cos 6x} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}; T_{\sin \sqrt{2}x} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi.$$

И здесь равенство $\frac{\pi}{3}n = m\sqrt{2}\pi \Leftrightarrow \frac{n}{3} = m\sqrt{2}$ невозможно ни при каких рациональных n и m , кроме $n = m = 0$;

$$\text{в) } T_{\cos 4\pi x} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}; T_{\sin 6\pi x} = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_y = \frac{n}{2} = \frac{m}{3} \Rightarrow n = 2 \cdot \frac{m}{3} \Rightarrow \begin{cases} m = 3, \\ n = 2, \end{cases} T_y = 1.$$

Ответ: а) непериодическая; б) непериодическая; в) $T_y = 1$.

1.2.5. Монотонность тригонометрических функций. Экстремумы

Определение 1.8. Функция $y = f(x)$, $x \in X$ называется:

а) *строго возрастающей* на интервале $(a, b) \subset X$, если для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство

$$f(x_1) < f(x_2);$$

б) *строго убывающей* на интервале $(a, b) \subset X$, если для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Строго возрастающие и строго убывающие функции называются *строго монотонными*.

Определение 1.9. Функция $y = f(x)$, $x \in X$ называется:

а) *возрастающей* на интервале $(a, b) \subset X$, если для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство

$$f(x_1) \leq f(x_2);$$

б) *убывающей* на интервале $(a, b) \subset X$, если для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*.

Достаточным условием строгого возрастания дифференцируемой на (a, b) функции $f(x)$ является выполнение неравенства

$f'(x) > 0$ для всех $x \in (a; b)$. Если же $f'(x) < 0$, то $f(x)$ строго убывает на $(a; b)$.

Определение 1.10. Точка x_0 , принадлежащая области определения функции $y = f(x)$, $x \in X$, называется точкой *локального максимума* функции f , если существует интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset X$, $\varepsilon > 0$, такой, что для всех точек x из этого интервала выполняется неравенство

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Если неравенство строгое: $f(x) < f(x_0)$, $x \neq x_0$, то говорят, что x_0 — точка *строгого локального максимума* функции $f(x)$.

Аналогично определяются точки локального минимума и строго локального минимума:

Определение 1.11. Точка x_0 , принадлежащая области определения функции $y = f(x)$, $x \in X$, называется точкой *локального минимума* функции f , если существует интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset X$, $\varepsilon > 0$, такой, что для всех точек x из этого интервала выполняется неравенство

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Если неравенство строгое: $f(x) > f(x_0)$, $x \neq x_0$, то говорят, что x_0 — точка *строгого локального минимума*.

Точки локального максимума и локального минимума объединяют общим названием точек *локального экстремума*.

Для нахождения точек локального экстремума дифференцируемой функции используют необходимые (теорема Ферма) и достаточные условия.

Теорема Ферма. Если x_0 — точка локального экстремума функции $y = f(x)$, $x \in X$, и в точке x_0 существует конечная производная $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Точки $x_0 \in X$, в которых $f'(x_0) = 0$, называются *стационарными точками* функции $f(x)$.

Стационарные точки являются точками возможного экстремума функции f . Однако локальный экстремум может достигаться также в точках, в которых функция непрерывна, а ее производная не существует. Например, функция $y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ имеет локальный максимум в точке $x = 0$, а ее производная в этой точке не существует; функция $y = |x - 1|$ имеет локальный минимум в точке $x = 1$ и также не дифференцируема в этой точке.

Стационарные точки и точки, в которых производная функции f не существует, но функция в этой точке непрерывна, называются *критическими точками* функции. Все точки локального экстремума функции, непрерывной в этих точках, содержатся среди ее критических точек.

Теорема (достаточное условие локального экстремума). Если $f(x)$ непрерывна в своей критической точке x_0 и имеет конечную производную в некотором интервале $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, за исключением, быть может, точки x_0 , то в точке x_0 будет:

а) строгий локальный максимум, если $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0; x_0 + \varepsilon)$;

б) строгий локальный минимум, если $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0; x_0 + \varepsilon)$.

Если же $f'(x)$ сохраняет знак в некоторой окрестности слева и справа от критической точки x_0 , то в точке x_0 нет экстремума.

Локальные экстремумы в точках разрыва функции f находятся исходя из определения точек локального максимума и минимума. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

терпит разрыв в точке $x = 0$ и имеет, в соответствии с определением 1.10, в этой точке строгий локальный максимум, поскольку для всех $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$ выполняется неравенство $f(x) < f(0)$.

Определение 1.12. Число M называется *наибольшим значением* функции $y = f(x)$, $x \in X$, на множестве X , если существует точка $x_M \in X$, такая, что

$$f(x) \leq M = f(x_M)$$

для всех $x \in X$, $x \neq x_M$.

В этом случае пишут

$$M = \max_{x \in X} f(x) = f(x_M).$$

Определение 1.13. Число m называется *наименьшим значением* функции $y = f(x)$, $x \in X$, на множестве X , если существует точка $x_m \in X$, такая, что

$$f(x) \geq m = f(x_m)$$

для всех $x \in X$, $x \neq x_m$.

В этом случае пишут

$$m = \min_{x \in X} f(x) = f(x_m).$$

Наименьшее и наибольшее значения существуют не для всякой функции. Например, функции $y = x$, $x \in (a; b)$; $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ не имеют наибольшего и наименьшего значений.

Однако если функция $y = f(x)$ определена и *непрерывна на отрезке* $[a; b]$, то она достигает своих наибольшего M и наименьшего m значений.

Это утверждение носит название *теоремы Вейерштрасса* и имеет самые обширные приложения.

Пример 1.20. Найдите интервалы возрастания и убывания функций

$$\text{а) } y = \sin 3x; \quad \text{б) } y = \sin(3x - \pi/4).$$

Решение. а) График функции $y = \sin 3x$ получается из графика функции $y = \sin x$ сжатием последнего вдоль оси Ox в 3 раза. Период функции $y = \sin 3x$ также уменьшается в 3 раза и равен $\frac{2\pi}{3}$. Поэтому имеем:

$$\text{интервалы возрастания: } \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{интервалы убывания: } \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 3\left(x - \frac{\pi}{12}\right).$$

График функции $y = \sin(3x - \pi/4)$ получается из графика $y = \sin 3x$ сдвигом на $\frac{\pi}{12}$ вправо вдоль оси Ox . Соответственно сместятся вправо на $\frac{\pi}{12}$ границы интервалов монотонности.

Интервалы возрастания:

$$\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n\right) = \left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z};$$

интервалы убывания:

$$\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{7}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 1.21. Расположите в порядке возрастания числа

$$\sin 1, \sin 3, \sin 4, \sin 7, \sin 9, \sin 11, 5.$$

Решение. *Способ 1.* Установим принадлежность чисел 1, 3, 4, 7, 9, 11,5 отрезкам вида $\left[\frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{2}(n+1)\right]$ (см. пример 1.5).

Имеем: $1 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; $3 \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; $4 \in \left[\pi; \frac{3}{2}\pi\right]$; $7 \in \left[2\pi; \frac{5}{2}\pi\right]$; $9 \in \left[\frac{5}{2}\pi; 3\pi\right]$; $11,5 \in \left[\frac{7}{2}\pi; 4\pi\right]$. Это означает, что углы 1, 3, 7 и 9 радиан принадлежат 1-й и 2-й четвертям тригонометрического круга, где $\sin \alpha \geq 0$, а углы 4 и 11,5 радиан — 3-й и 4-й четвертям, в которых $\sin \alpha \leq 0$. Поэтому сравнить между собой необходимо, с одной стороны, положительные числа: $\sin 1$, $\sin 3$, $\sin 7$, $\sin 9$, и, с другой, — отрицательные: $\sin 4$, $\sin 11,5$.

Сравним $\sin 1$ и $\sin 7$:

$$\sin 1 - \sin 7 = -2 \sin 3 \cos 4;$$

так как

$$\sin 3 > 0, \quad \cos 4 < 0 \quad (4 \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)),$$

то

$$\sin 1 - \sin 7 > 0, \quad \text{или} \quad \sin 1 > \sin 7.$$

Сравним теперь числа $\sin 7$, $\sin 9$ и $\sin 3$:

$$\sin 7 - \sin 9 = -2 \sin 1 \cos 8 > 0 \quad (8 \in \left(\frac{5}{2}\pi; 3\pi\right) \Rightarrow \cos 8 < 0)$$

и потому $\sin 7 > \sin 9$;

$$\sin 7 - \sin 3 = 2 \sin 2 \cdot \cos 5 > 0 \Leftrightarrow \sin 7 > \sin 3.$$

Поскольку $\sin 7 > \sin 9$ и $\sin 7 > \sin 3$, то достаточно сравнить числа $\sin 9$ и $\sin 3$:

$$\sin 9 - \sin 3 = 2 \sin 3 \cdot \cos 6 > 0 \Leftrightarrow \sin 9 > \sin 3.$$

Сравним теперь числа $\sin 4$ и $\sin 11,5$:

$$\begin{aligned} \sin 11,5 - \sin 4 &= 2 \sin 3,75 \cdot \cos 7,75 < 0 \Leftrightarrow \sin 11,5 < \sin 4 < 0 \\ (3,75 \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right) \Rightarrow \sin 3,75 < 0; \quad 7,75 \in \left(2\pi; \frac{5}{2}\pi\right) \Rightarrow \cos 7,75 > 0). \end{aligned}$$

Окончательно получаем неравенства

$$\sin 1 > \sin 7 > \sin 9 > \sin 3 > \sin 4 > \sin 11,5.$$

Способ 2. Как и в способе 1, выделим положительные и отрицательные значения синусов. Далее, сравнение положительных значений синусов углов 1, 3, 7, 9 радиан можно заменить сравнением синусов эквивалентных им углов из интервала $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$,

на котором функция $y = \sin x$ также принимает положительные значения и является строго возрастающей, а синусов углов 4, 11,5 радиан — значениями синусов эквивалентных им углов из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, в котором функция $y = \sin x$ принимает отрицательные значения и является строго возрастающей.

Имеем:

$$\sin 3 = \sin(\pi - 3), \quad \sin 7 = \sin(7 - 2\pi), \quad \sin 9 = \sin(3\pi - 9)$$

и при этом углы $(\pi - 3)$, $(7 - 2\pi)$, $(3\pi - 9)$ и 1 радиан принадлежат интервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Аналогично получаем

$$\sin 4 = \sin(\pi - 4) < 0, \quad \sin 11,5 = \sin(11,5 - 4\pi) < 0$$

и при этом углы $(\pi - 4)$ и $(11,5 - 4\pi)$ принадлежат интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

На каждом интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ и $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \sin x$ является монотонно возрастающей и потому большему углу $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ отвечает большее значение синуса этого угла. Сравним сначала углы из интервала $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Имеем:

$$\pi - 3 \vee 7 - 2\pi \Leftrightarrow 3\pi \vee 10,$$

поскольку $3\pi < 10$, то $\pi - 3 < 7 - 2\pi$ и потому $\sin 3 < \sin 7$.

Аналогично получаем:

$$\pi - 3 \vee 3\pi - 9 \Leftrightarrow 6 \vee 2\pi \Rightarrow 6 < 2\pi, \quad \pi - 3 < 3\pi - 9$$

и $\sin 3 < \sin 9$;

$$7 - 2\pi \vee 3\pi - 9 \Leftrightarrow 16 \vee 5\pi \Rightarrow 16 > 5\pi, \quad 7 - 2\pi > 3\pi - 9$$

и $\sin 7 > \sin 9$;

$$1 \vee 7 - 2\pi \Leftrightarrow 2\pi \vee 6 \Rightarrow 2\pi > 6, \quad 1 > 7 - 2\pi$$

и $\sin 1 > \sin 7$.

Объединяя полученные неравенства, получаем цепочку неравенств

$$\sin 1 > \sin 7 > \sin 9 > \sin 3 > 0.$$

Сравним теперь углы $\pi - 4$ и $11,5 - 4\pi$: $\pi - 4 \vee 11,5 - 4\pi \Leftrightarrow 5\pi \vee 15,5 \Rightarrow 5\pi > 15,5$, $\pi - 4 > 11,5 - 4\pi$ и $\sin 11,5 < \sin 4 < 0$.

Окончательно получаем неравенства

$$\sin 1 > \sin 7 > \sin 9 > \sin 3 > \sin 4 > \sin 11,5.$$

Способ 3. Обозначим $\alpha(1), \alpha(3), \alpha(4), \dots, \alpha(11,5)$ — значения углов в градусах, отвечающие 1, 3, 4, 7, 9, 11,5 радианам соответственно. Поскольку $\alpha(1) \approx 57,3^\circ$, то можем записать неравенства:

$$\begin{aligned} 57^\circ &< \alpha(1) < 58^\circ, \\ 171^\circ &< \alpha(3) < 174^\circ, \\ 228^\circ &< \alpha(4) < 232^\circ, \\ 399^\circ &< \alpha(7) < 406^\circ, \\ 513^\circ &< \alpha(9) < 522^\circ, \\ 655,5^\circ &< \alpha(11,5) < 667^\circ \end{aligned}$$

(рис. 1.16).

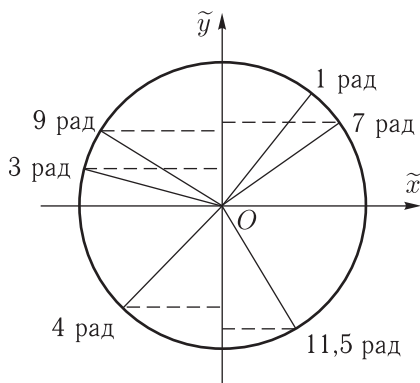


Рис. 1.16

Применив формулы приведения, получим:

$$\begin{aligned} \sin 171^\circ &= \sin(180^\circ - 9^\circ) = \sin 9^\circ; & \sin 174^\circ &= \sin 6^\circ; \\ \sin 228^\circ &= \sin(180^\circ + 48^\circ) = -\sin 48^\circ; & \sin 232^\circ &= -\sin 52^\circ; \\ \sin 399^\circ &= \sin 39^\circ; & \sin 406^\circ &= \sin 46^\circ; \\ \sin 513^\circ &= \sin 153^\circ = \sin 27^\circ; & \sin 522^\circ &= \sin 162^\circ = \sin 18^\circ; \\ \sin 655,5^\circ &= -\sin 64,5^\circ; & \sin 667^\circ &= -\sin 53^\circ. \end{aligned}$$

С учетом монотонного возрастания функции $y = \sin x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ получим неравенства для синусов углов:

$$\begin{aligned} -\sin 64,5^\circ &< \sin 11,5 < -\sin 53^\circ < 0; \\ -\sin 52^\circ &< \sin 4 < -\sin 48^\circ < 0; & \sin 6^\circ < \sin 3 < \sin 9^\circ; \\ \sin 18^\circ &< \sin 9 < \sin 27^\circ; & \sin 39^\circ < \sin 7 < \sin 46^\circ; \\ \sin 57^\circ &< \sin 1 < \sin 58^\circ, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\sin 11,5 < \sin 4 < \sin 3 < \sin 9 < \sin 7 < \sin 1.$$

Ответ: $\sin 11,5$; $\sin 4$; $\sin 3$; $\sin 9$; $\sin 7$; $\sin 1$.

Пример 1.22. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\left(x - \cos \frac{\pi}{90}\right) \left(\operatorname{ctg} \frac{7}{30}\pi - x\right)}.$$

Решение. Введем обозначения $x_1 = \cos \frac{\pi}{90}$, $x_2 = \operatorname{ctg} \frac{7}{30}\pi$. Из неравенства $0 < \frac{\pi}{90} < \frac{\pi}{2}$ и свойств функции $y = \cos x$ следует, что $0 < x_1 < 1$. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ строго убывает на интервале $(0; \pi)$, а $\frac{7}{30}\pi = \frac{42}{180}\pi < \frac{45}{180}\pi = \frac{\pi}{4}$ и потому $\operatorname{ctg} \frac{7}{30}\pi > \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$, т. е. $x_2 > 1$.

Из неравенств $0 < x_1 < 1$, $x_2 > 1$ следует, что $x_1 < x_2$. Поэтому область определения $D(y)$ будет задаваться каждым из неравенств

$$(x - x_1)(x_2 - x) \geq 0 \Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2) \leq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq x \leq x_2,$$

т. е. $\cos \frac{\pi}{90} \leq x \leq \operatorname{ctg} \frac{7}{30}\pi$.

Ответ: $x \in \left[\cos \frac{\pi}{90}; \operatorname{ctg} \frac{7}{30}\pi\right]$.

Пример 1.23. Решите неравенство

$$\left(x - \operatorname{ctg} \frac{7}{6}\pi\right) \left(x - \sin \frac{7}{4}\pi\right) (\cos 2 - \cos 5) \geq 0.$$

Решение. $\operatorname{ctg} \frac{7}{6}\pi = \operatorname{ctg} \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$; $\sin \frac{7}{4}\pi = \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Так как $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$ и $\cos 2 < 0$, а $\frac{3}{2}\pi < 5 < 2\pi$ и $\cos 5 > 0$, то $\cos 2 - \cos 5 < 0$. Поэтому имеем неравенство

$$\left(x - \sqrt{3}\right) \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leq 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{3}\right].$$

Ответ: $x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{3}\right]$.

Пример 1.24. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 2 \cos^2 x - \sin x + 1.$$

Решение. *Способ 1.*

$$\begin{aligned} y &= 2(1 - \sin^2 x) - \sin x + 1 = 3 - 2 \sin^2 x - \sin x = \\ &= 3 - 2 \left(\sin^2 x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{16} \right) + \frac{1}{8} = 3 \frac{1}{8} - 2 \left(\sin x + \frac{1}{4} \right)^2. \end{aligned}$$

Поскольку $0 \leq \left(\sin x + \frac{1}{4} \right)^2 \leq \left(\frac{5}{4} \right)^2$, то

$$\max_{x \in \mathbb{R}} y(x) = 3 \frac{1}{8} - 2 \cdot 0 = \frac{25}{8}; \quad \min_{x \in \mathbb{R}} y(x) = \frac{25}{8} - 2 \cdot \frac{25}{16} = 0.$$

Способ 2. Обозначив $\sin x = t$, $t \in [-1; 1]$, получим задачу: найти наибольшее $y_{\text{наиб}}$ и наименьшее $y_{\text{наим}}$ значения функции $y(t) = 3 - 2t^2 - t$ на отрезке $[-1; 1]$. В соответствии с теоремой Вейерштрасса непрерывная на отрезке функция принимает свои наибольшее и наименьшее значения $y_{\text{наиб}}$ и $y_{\text{наим}}$. Поэтому вычисляем:

1) значения функции на концах отрезка:

$$y(-1) = 3 - 2 + 1 = 2; \quad y(1) = 3 - 2 - 1 = 0;$$

2) значения функции в стационарных точках:

$$y'_t = -4t - 1 = 0 \text{ при } t = -\frac{1}{4} \text{ и } y\left(-\frac{1}{4}\right) = 3 - 2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{25}{8}.$$

$$3) \ y_{\text{наиб}} = \max \left\{ 0, 2, \frac{25}{8} \right\} = \frac{25}{8}; \quad y_{\text{наим}} = \min \left\{ 0, 2, \frac{25}{8} \right\} = 0.$$

$$\text{Ответ: } y_{\text{наиб}} = \frac{25}{8}; \quad y_{\text{наим}} = 0.$$

Пример 1.25*. Найдите точки локальных экстремумов функции

$$y = 3 \sec x + 4 \cos x$$

и значения функции в этих точках.

Решение. Для решения задачи необходимо, во-первых, найти критические точки функции $y(x)$, во-вторых, исследовать их характер.

$$\begin{aligned} 1. \ y' &= \left(\frac{3}{\cos x} + 4 \cos x \right)' = \frac{3 \sin x}{\cos^2 x} - 4 \sin x = \frac{\sin x (3 - 4 \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \\ &= 4 \frac{\sin x \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x \right)}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Находим критические точки функции:

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi m, & m \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm \frac{5}{6}\pi + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Производная $y'(x)$ не существует в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, в которых не определена и сама функция.

2. Исследуем поведение функции в окрестности стационарных точек. В малой окрестности точек $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, выражение $(3 - 4 \cos^2 x)$ отрицательно, так как $3 - 4 \cos^2 \pi n = 3 - 4 = -1$, а функция $\sin x$ при переходе через точку πn меняет знак с «+» на «-» при нечетных n и с «-» на «+» при четных n . Поэтому в точках $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, функция $y(x)$ будет иметь локальные максимумы $y(2\pi n) = 3 + 4 = 7$, а в точках $x = (2n + 1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, — локальные минимумы $y((2n + 1)\pi) = -3 - 4 = -7$.

С учетом четности функции $y = \cos x$ и ее периодичности далее достаточно исследовать только стационарные точки $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5}{6}\pi$. В точке $\frac{\pi}{6}$ и в малой ее окрестности

$$\sin x \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x \right) > 0 \quad \left(\sin \frac{\pi}{6} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Выражение $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x \right)$, а значит и производная $y'(x)$, меняет знак с «-» на «+» при переходе через точку $x = \frac{\pi}{6}$. Поэтому в точке $x = \frac{\pi}{6}$, а значит, и в точках $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, функция $y(x)$ имеет локальные минимумы

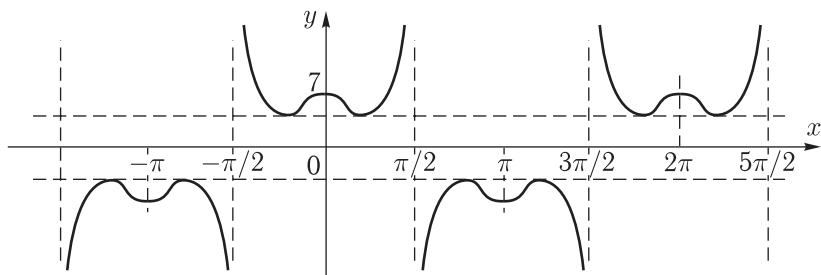
$$(y \left(\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right) = 3 / \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 4 \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} < 7).$$

Аналогично показывается, что в точках $x = \pm \frac{5}{6}\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, функция $y(x)$ будет иметь локальные максимумы $(y \left(\pm \frac{5}{6}\pi + 2\pi n \right) = -4\sqrt{3} > -7)$.

На рис. 1.17 приведен график функции $y = 3 \sec x + 4 \cos x$.

Ответ: $y_{\min} = -7$ в точках $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$y_{\min} = 4\sqrt{3}$ в точках $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

Рис. 1.17. Графики функции $y = 3 \sec x + 4 \cos x$

$y_{\max} = 7$ в точках $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$y_{\max} = -4\sqrt{3}$ в точках $x = \pm \frac{5}{6}\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 1.26. Найдите множества значений функций:

а) $y = \frac{1}{\sin x - \frac{1}{2}}$; б) $y = \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^3}}$.

Решение. Нахождение множества значений сложной функции удобно осуществлять в виде поэтапной процедуры, сводя на каждом шаге задачу к нахождению множества значений некоторой элементарной функции.

а) Имеем $y = \frac{1}{\sin x - \frac{1}{2}} \Leftrightarrow y = \frac{1}{t}$, где $t = \sin x - \frac{1}{2}$.

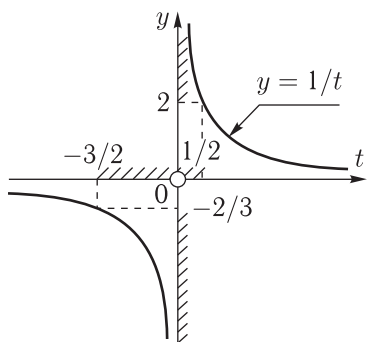


Рис. 1.18

1. Находим множество значений функции $t = \sin x - \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Поскольку $E(\sin x) = [-1; 1]$, то с учетом свойств функции $y = f(x) + a$ получаем

$$E(t) = \left[-1 - \frac{1}{2}; 1 - \frac{1}{2}\right] = \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

2. Находим множество значений функции $y = \frac{1}{t}$, $t \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $t \neq 0$.

Из рис. 1.18 видно, что

$$E(y) = \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup [2; +\infty).$$

б) Введем функции $t = \sin x - \frac{1}{2}$; $p = \frac{1}{t}$; $s = 1 + p^3$; $y = \sqrt{s}$ и найдем последовательно множество значений каждой из введенных функций.

$$1. t = \sin x - \frac{1}{2} \Rightarrow E(t) = \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

$$2. p = \frac{1}{t}, t \in \left[-\frac{3}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow E(p) = \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup [2; +\infty).$$

$$3. s = 1 + p^3, p \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup [2; +\infty).$$

Функция $s(p)$ является строго возрастающей на области задания, поэтому

$$E(s) = \left(-\infty; 1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^3\right] \cup [1 + 2^3; +\infty) = \left(-\infty; \frac{19}{27}\right] \cup [9; +\infty).$$

$$4. y = \sqrt{s}, s \in \left[0; \frac{19}{27}\right] \cup [9; +\infty).$$

Функция $y = \sqrt{s}$ также является строго возрастающей на области задания, и поэтому $E(y) = \left[0; \sqrt{\frac{19}{27}}\right] \cup [3; +\infty)$.

$$\text{Ответ: а) } \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup [2; +\infty); \text{ б) } \left[0; \sqrt{\frac{19}{27}}\right] \cup [3; +\infty).$$

1.2.6. Построение графиков тригонометрических функций

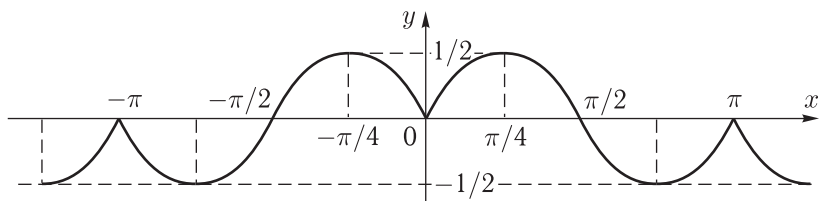
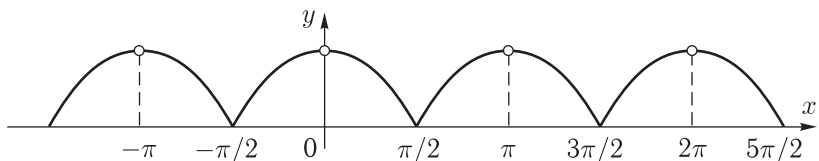
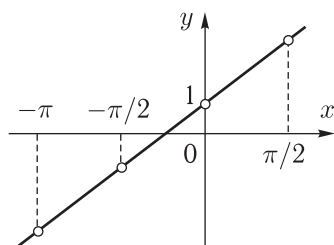
Пример 1.27. Постройте график функции $y = \cos x \cdot |\sin x|$.

Решение. Функция $y(x)$ — четная и 2π -периодическая. Поэтому достаточно построить график функции на отрезке $[0; \pi]$; затем отобразить его симметрично относительно оси Oy на отрезок $[-\pi; 0]$ и далее продолжить периодически построенный на отрезке $[-\pi; \pi]$ график на всю числовую прямую. На отрезке $[0; \pi]$ имеем $|\sin x| = \sin x$ и соответственно $y = \cos x \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$.

Искомый график функции $y = \cos x \cdot |\sin x|$ приведен на рис. 1.19.

Пример 1.28. Постройте график функции $y = \left| \frac{\sin 2x}{\sin x} \right|$.

Решение. $y(x) = \left| \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\sin x} \right| = 2|\cos x|$, если $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 1.20).

Рис. 1.19. График функции $y = \cos x \cdot |\sin x|$ Рис. 1.20. График функции $y = \left| \frac{\sin 2x}{\sin x} \right|$ Рис. 1.21. График функции $y = x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$

Пример 1.29. Постройте график функции

$$y = x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x.$$

Решение.

$$y = x + \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = x + 1,$$

если $x \neq \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$ (рис. 1.21).

1.3. Задачи для самостоятельного решения

К подразделу 1.1

- Вычислите: а) $\sin(-570^\circ)$; б) $\cos 840^\circ$; в) $\operatorname{tg} 870^\circ$; г) $\operatorname{ctg}(-420^\circ)$; д) $\cos(-510^\circ)$; е) $\sec 600^\circ$.
- Вычислите: а) $\sin \frac{13}{3}\pi$; б) $\cos \frac{217}{6}\pi$; в) $\operatorname{tg} \frac{287}{4}\pi$; г) $\sec \frac{29}{3}\pi$; д) $\operatorname{cosec} \frac{113}{6}\pi$.

К п. 1.2.1

- Переведите из радианной в градусную меру:

$$\frac{2}{3}\pi; \frac{3}{4}\pi; \frac{5}{6}\pi; \frac{7}{6}\pi; \frac{5}{4}\pi; \frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi; \frac{7}{4}\pi; \frac{11}{6}\pi.$$

4. Переведите из градусной в радианную меру:
390°; 450°; 510°; 570°; 600°; 780°;
810°; 840°; 900°; 930°; 1000°.
5. Вычислите длину дуги ℓ и площадь сектора S радиусом 12 см с центральным углом 37°30'.
6. Длина дуги сегмента в круге радиусом 4 равна $\frac{10}{3}\pi$. Найдите центральный угол α , отвечающий этому сегменту, и площадь сегмента S .
7. Вершины вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ делят окружность в отношении 3 : 6 : 7 : 8. Найдите внутренние углы четырехугольника (в радианах).
8. Укажите отрезки вида $[\pi n; \pi(n+1)]$, $n \in \mathbb{Z}$, которым принадлежат числа:

а) 5; б) $\frac{17}{2}$; в) $\frac{29}{2}$; г) 23; д) $\frac{63}{2}$.

К п. 1.2.2

9. Определите знак числа $A = \cos 12 \cdot \operatorname{tg} \frac{35}{2}$.
10. Определите знак числа $A = \cos 21 \cdot \operatorname{ctg} 14 \cdot \operatorname{cosec} 17$.
11. Определите знак числа $A = \cos 3 \cdot \cos 5 \cdot \cos 6 \cdot \cos 8$.
12. Вычислите $\frac{\operatorname{ctg} 10^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ}{1 - \operatorname{ctg} 10^\circ \cdot \operatorname{ctg} 50^\circ}$.
13. Вычислите $\operatorname{tg} 690^\circ \cdot \sin 480^\circ - \operatorname{ctg} 870^\circ \cdot \cos 570^\circ$.
14. Вычислите $\operatorname{cosec} 870^\circ \cdot \operatorname{ctg} 855^\circ + \sec 1020^\circ \cdot \sin 810^\circ$.
15. Вычислите: а) $\cos^2 22^\circ 30'$; б) $\sin^2 22^\circ 30'$; в) $\operatorname{tg} 22^\circ 30'$.
16. Вычислите $\cos^2 \left(\frac{19}{2}\pi - 3 \right) - \sin^2 \left(3 - \frac{27}{2}\pi \right)$.
17. Вычислите $\sqrt{\cos^2 659^\circ - \sin 749^\circ + \frac{1}{16} \operatorname{cosec}^2 690^\circ + \sin 511^\circ}$.
18. Вычислите $\cos \left(\frac{9}{2}\pi - \alpha \right) \operatorname{ctg} (7\pi + \alpha) \sec (11\pi + \alpha)$.

К п. 1.2.3

19. Установите, какие из приведенных функций являются четными или нечетными:
- а) $y = \sin |x|$; б) $y = \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{3}{4}\pi + x \right)$;
в) $y = \sin \left| x - \frac{\pi}{3} \right|$; г) $y = \cos x \operatorname{tg} x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

- д) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x$, $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}m$, $m \in \mathbb{Z}$.
- 20.** Установите, при каких значениях параметров a и b приведенные функции являются четными или нечетными:
- а) $y = a \sec x + b \operatorname{cosec} x$, $x \neq \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$;
 б) $y = a \sqrt[3]{x} \sin x + b \sqrt[3]{x^2} \cos x^3$;
 в) $y = ax \operatorname{tg} |x| + b \operatorname{ctg} x$; $x \neq \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$;
 г) $y = ax \sin \frac{|x|}{x} + b \frac{|x|}{x} \cos x$.
- 21.** Установите, какие из приведенных функций являются четными или нечетными:
- а) $y = \sin 3x + \cos 2x$; б) $y = \sin 3|x| + \cos 2x$;
 в) $y = \sin 3x + \sin 2x$; г) $y = \sin 3x \cos 2x$;
 д) $y = \sin 3x \sin 2x$; е) $y = \cos 3x \cos 2x$.
- 22.** Найдите все значения параметра a , при которых уравнение
- $$\cos^2 x - 2a \cos x + a^2 + x^2 = 0$$
- имеет единственное решение.
- 23*.** Найдите все значения параметра a , при которых уравнение
- $$\cos^4 x - (a^2 - 2) \cos^2 x - 2a^2 = 0$$
- имеет четное число корней на любом отрезке $[-b; b]$, $b \geq \frac{\pi}{2}$.
- 24*.** Найдите все значения параметра a , при которых уравнение
- $$\cos^4 x - (a^2 - 2) \cos^2 x - 2a^2 = 0$$
- имеет нечетное число корней на любом отрезке $[-b; b]$, $b > 0$.

К п. 1.2.4

- 25.** Определите основные периоды функций:
- а) $y = 5 \operatorname{tg} \left(\frac{19}{6}x + \frac{\pi}{4} \right)$; б) $y = 3 \operatorname{cosec} \left(8x + \frac{\pi}{3} \right)$;
 в) $y = 2 \sin \left(\frac{4}{5}x + 3 \right)$; г) $y = \operatorname{ctg} 11x$.
- 26.** Определите основные периоды функций:
- а) $y = \cos \frac{10}{3}x + \sin \frac{14}{5}x$; б) $y = \operatorname{tg} \frac{4}{9}x + \operatorname{ctg} \frac{8}{3}x + \sec 4x$;
 в) $y = \cos \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right)$.
- 27.** Определите основные периоды функций:
- а) $y = \cos^3 2x$; б) $y = \cos^4 x$;
 в) $y = \cos^2 2x \cdot \sin 6x$; г) $y = \sin^n x$, $n \in \mathbb{N}$.

28. Установите, являются ли периодическими функции, и если являются, то найдите основные периоды:

а) $y = \operatorname{tg} \pi x + \operatorname{ctg} 3x$; б) $y = \operatorname{tg} \pi x + \operatorname{ctg} \frac{3}{4} \pi x$;

в) $y = \cos 2\sqrt{3}x + \sin 12x$; г) $y = \cos \sqrt{2}x + \sin \sqrt{8}x$.

29. Определите основные периоды функций:

а) $y = \sin \frac{5}{3}x \cos \frac{3}{2}x$; б) $y = \sin \frac{4}{9}\pi x \cdot \cos \frac{16}{3}\pi x$;

в) $y = 2 \sin \left(\frac{10}{3}x - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{2}{5}\pi$; г) $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x + 1$.

К п. 1.2.5

30. Найдите интервалы возрастания (убывания) и точки локальных экстремумов функций:

а) $y = \cos 4x$; б) $y = \cos \left(\frac{\pi}{3} - 4x \right)$;

в) $y = \operatorname{tg} 3x$; г) $y = \operatorname{tg} \left(3x - \frac{\pi}{3} \right)$.

31. Расположите в порядке возрастания числа:

$$\cos 1, \quad \cos 3, \quad \cos 5, \quad \cos 6, \quad \cos 8.$$

32. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\sin 41^\circ, \cos 41^\circ, \operatorname{ctg} 41^\circ$; б) $\sin 53^\circ, \cos 53^\circ, \operatorname{tg} 53^\circ$;

в) $\sin 230^\circ, \cos 230^\circ, \operatorname{tg} 230^\circ$.

33. Расположите в порядке возрастания числа:

$$\operatorname{tg} 142^\circ, \quad \operatorname{tg} 46^\circ, \quad \operatorname{ctg} 43^\circ, \quad \operatorname{ctg} 148^\circ, \quad \cos 43^\circ, \quad \sin 46^\circ.$$

34. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{-\left(x + \operatorname{tg} \frac{34}{45}\pi\right)(x + \cos 2)}.$$

35. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{(\sin 2 - x)\left(x - \operatorname{tg} \frac{113}{90}\pi\right)}.$$

36. Решите неравенство

$$x \left(x - \sec \frac{11}{6}\pi \right) \left(x - \operatorname{ctg} \frac{19}{6}\pi \right) \left(x - \operatorname{tg} \sqrt{2} \right) \leq 0.$$

37. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = 3 \sin^2 x - 4 \cos x + 2.$$

38. Найдите множество значений функции

$$y = -2 \cos^2 x + 4 \sin x + 3.$$

Найдите множество значений функции (39–47).

39. $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$. **40.** $y = \frac{3}{2 \sin x - 1}$. **41.** $y = \frac{3}{\sin x - 2}$.
42. $y = \frac{5}{2 \sin x + 3}$. **43.** $y = \log_3 \frac{1}{\sin x + 2}$. **44.** $y = 2^{3/(2 \sin x - 1)}$.
45. $y = \frac{\sqrt{2}}{\cos x + \sin x}$. **46.** $y = \frac{4}{\cos^2 x - 3 \cos x}$. **47.** $y =$
 $= \sqrt{\frac{3 \cos^2 x - 9 \cos x + 4}{\cos^2 x - 3 \cos x}}.$

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции (48–52).

48. $y = \cos x - \sin x$. **49.** $y = 2 \cos^2 3x - 3 \cos 3x$. **50.** $y = 3^{-|\cos x|}$. **51.** $y = 3^{-|\operatorname{tg} x|}$. **52.** $y = \sqrt{7 - 3 \sin^2 x - 2 \cos x}$.

53*. Найдите локальные экстремумы и множество $E(y)$ значений функции $y = \sin x + \frac{1}{2} \operatorname{cosec} x$.

К п. 1.2.6

Постройте графики функций.

54. $y = |\sin x + \sqrt{3} \cos x|$. **55.** $y = |\sin x| + |\cos x|$.
56. $y = 2 - \sin |x|$. **57.** $y = \sin \left| x - \frac{\pi}{2} \right|$. **58.** $y = \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$.
59. $y = \frac{\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{1 + \cos x}}$. **60.** $y = \frac{\sqrt{2} \sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}$. **61.** $y = \sin x |\cos x| +$
 $+ \cos |\sin x|$. **62.** $y = \sin x + \frac{1}{2} \operatorname{cosec} x$.

Задачи выпускных и вступительных экзаменов

63¹⁾. (Государственный университет Высшая школа экономики — ГУ ВШЭ, 2002 г.) Укажите наибольшее значение параметра p , при котором уравнение $\sin^2 x - 3 \sin x = p$ имеет хотя бы один корень:

1) $\sqrt{10}$; 2) 5; 3) 4; 4) $\frac{13}{4}$; 5) $\frac{15}{4}$.

¹⁾ Курсивом выделяются номера задач с выбором ответа из нескольких предложенных.

- 64.** (ГУ ВШЭ, 2003 г.) Множество значений функции $y = 5 \sin^2 x + \sin x$ представляет собой промежуток, длина которого равна:

1) $12\frac{1}{5}$; 2) $12\frac{2}{5}$; 3) $12\frac{3}{5}$; 4) $12\frac{4}{5}$; 5) 13.

- 65.** (ЕГЭ, 2007 г.: C1) Найдите точки максимума функции

$$f(x) = 4,5x^2 + 4x^3 - \frac{15 - 15 \sin^2(\pi x)}{\cos^2(\pi x)} \cdot x^4.$$

- 66.** (ЕГЭ, 2007 г.: B8) Найдите значение параметра a (или произведение таких значений, если их несколько), при котором основной период функции $y = \operatorname{ctg}((a^2 + 2a - 44) \cdot x)$ равен $\frac{\pi}{36}$.

- 67.** (МАИ) Постройте график функции $y = \sin 2x - 1$.

- 68.** (МАИ) Постройте график функции

$$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right).$$

- 69.** (Липецкий государственный педагогический институт) Исследуйте на четность и нечетность функцию

$$y = \lg\left(\sqrt{9 \operatorname{tg}^2 x + 1} - 3 \operatorname{tg} x\right).$$

- 70.** (МФТИ, 1996 г.) Дана функция $f(x) = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

Найдите: 1) корни уравнения $f(x) = \frac{7}{10}$; 2) наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)$.

- 71.** (ЕГЭ: C3) Найдите все значения p , при которых уравнение $4 \sin^3 x = p + 7 \cos 2x$ не имеет корней.

- 72.** (ЕГЭ) Найдите наименьшее целое значение функции

$$y = 12 \cdot 2^{\sin 3x \cos 2x - \cos 3x \sin 2x - 2}.$$

- 73.** (ЕГЭ, 2005 г.: A10) Найдите производную функции

$$y = 2x^{-2} \cdot \sin x:$$

1) $y' = \frac{2(x \cos x - 2 \sin x)}{x^3}$; 2) $y' = -4x^{-3} \cos x$;

3) $y' = \frac{2(x \cos x - 2 \sin x)}{x^4}$; 4) $y' = -2x^{-3} \cos x$.

- 74.** (ЕГЭ, 2005 г.: В8) Найдите сумму целых значений функции

$$y = 3\sqrt{36 \cos^2 x - 12 \sin x + 27}.$$

- 75.** (Централизованное тестирование, математика — 2, 2005 г.). Укажите множество всех значений a , при которых уравнение $\cos \left(4 - \frac{2}{1+x^2} \right) = a$ имеет хотя бы один корень:

- 1) $[-1; \cos 4]$; 2) $[-1; \cos 2]$; 3) $(\cos 4; \cos 2]$; 4) $[\cos 2; \cos 4]$; 5) $[-1; 1]$.

1.4. Ответы

- 1.** а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; д) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) -2 . **2.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) -1 ; г) 2 ; д) 2 .

3.

$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$
120°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	315°	330°

4.

390°	450°	510°	570°	600°	780°	810°	840°	900°	930°	1000°
$\frac{13}{6}\pi$	$\frac{5}{2}\pi$	$\frac{17}{6}\pi$	$\frac{19}{6}\pi$	$\frac{10}{3}\pi$	$\frac{13}{3}\pi$	$\frac{9}{2}\pi$	$\frac{14}{3}\pi$	5π	$\frac{31}{6}\pi$	$\frac{50}{9}\pi$

- 5.** $\ell = \frac{5}{2}\pi$ см; $S = 15\pi$ см². **6.** $\alpha = \frac{5}{6}\pi$; $S = \frac{4(5\pi - 3)}{3}$. **7.** $\angle A = \frac{13}{24}\pi$; $\angle B = \frac{5}{8}\pi$; $\angle C = \frac{11}{24}\pi$; $\angle D = \frac{3}{8}\pi$. **8.** а) $[\pi; 2\pi]$; б) $[2\pi; 3\pi]$; в) $[4\pi; 5\pi]$; г) $[7\pi; 8\pi]$; д) $[10\pi; 11\pi]$.

- 9.** $A < 0$. **10.** $A > 0$. **11.** $A > 0$. **12.** $-\sqrt{3}$. **13.** -2 . **14.** 0 . **15.** а) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$; в) $\sqrt{2} - 1$. **16.** $-\cos 6$. **17.** $\frac{1}{2}$. **18.** -1 .

- 19.** а), б) — четные; г), д) — нечетные. **20.** а) четная при $a \in \mathbb{R}$, $b = 0$, нечетная при $b \neq 0$, $a = 0$; б) четная при $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$; в) нечетная при $a^2 + b^2 \neq 0$; г) четная при $a \in \mathbb{R}$, $b = 0$, нечетная при $b \in \mathbb{R}$, $a = 0$. **21.** б), д), е) — четные; в), г) — нечетные. **22.** $a = 1$. **23.** $|a| < 1$. **24.** $|a| = 1$.

- 25.** а) $\frac{6}{19}\pi$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{5}{2}\pi$; г) $\frac{\pi}{11}$. **26.** а) 15π ; б) $\frac{9}{2}\pi$; в) $\frac{\pi}{3}$.
- 27.** а) π ; б) π ; в) π ; г) π при n четном, 2π при n нечетном.
- 28.** а) не является периодической; б) 4; в) не является периодической; г) $\sqrt{2}\pi$. **29.** а) 12π ; б) $\frac{9}{2}$; в) $\frac{3}{5}\pi$; г) $\frac{9}{2}$.
- 30.** а) $\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{2}n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, — интервалы возрастания, $\left(\frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, — интервалы убывания, $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$, — точки локальных минимумов, $x = \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$, — точки локальных максимумов; б) $\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, — интервалы возрастания, $\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, — интервалы убывания, $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$, — точки локальных минимумов, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$, — точки локальных максимумов; в) $\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ — интервалы возрастания, локальных экстремумов нет; г) $\left(-\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}n; \frac{5\pi}{18} + \frac{\pi}{3}n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ — интервалы возрастания, локальных экстремумов нет. **31.** $\cos 3$, $\cos 8$, $\cos 5$, $\cos 1$, $\cos 6$. **32.** а) $\sin 41^\circ$, $\cos 41^\circ$, $\operatorname{ctg} 41^\circ$; б) $\cos 53^\circ$, $\sin 53^\circ$, $\operatorname{tg} 53^\circ$; в) $\operatorname{tg} 230^\circ$, $\sin 230^\circ$, $\cos 230^\circ$. **33.** $\operatorname{ctg} 148^\circ$, $\operatorname{tg} 142^\circ$, $\sin 46^\circ$, $\cos 43^\circ$, $\operatorname{tg} 46^\circ$, $\operatorname{ctg} 43^\circ$. **34.** $\left[-\cos 2; -\operatorname{tg} \frac{34}{45}\pi\right]$. **35.** $\left[\sin 2; \operatorname{tg} \frac{113}{90}\pi\right]$. **36.** $\left[0; \frac{2}{\sqrt{3}}\right] \cup [\sqrt{3}; \operatorname{tg} \sqrt{2}]$. **37.** $y_{\text{наим}} = -2$; $y_{\text{наиб}} = \frac{19}{3}$. **38.** $[-1; 7]$. **39.** $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. **40.** $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. **41.** $[-3; -1]$. **42.** $[1; 5]$. **43.** $[-1; 0]$. **44.** $\left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [8; +\infty)$. **45.** $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. **46.** $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$. **47.** $(0; 1] \cup [2; +\infty)$. **48.** $y_{\text{наим}} = -\sqrt{2}$; $y_{\text{наиб}} = \sqrt{2}$. **49.** $y_{\text{наим}} = -\frac{9}{8}$; $y_{\text{наиб}} = 5$. **50.** $y_{\text{наим}} = \frac{1}{3}$; $y_{\text{наиб}} = 1$. **51.** $y_{\text{наим}}$ не достигается; $y_{\text{наиб}} = 1$. **52.** $y_{\text{наим}} = \frac{\sqrt{33}}{3}$; $y_{\text{наиб}} = 3$. **53.** $y_{\text{наим}} = \sqrt{2}$ в точках $x = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $y_{\text{наим}} = -\frac{3}{2}$ в точках $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$,

$n \in \mathbb{Z}$; $y_{\text{наиб}} = -\sqrt{2}$ в точках $x = -\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $y_{\text{наиб}} = \frac{3}{2}$ в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $E(y) = (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$.

54. $y = |\sin x + \sqrt{3} \cos x| = 2 \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right|$ (рис. 1.22).

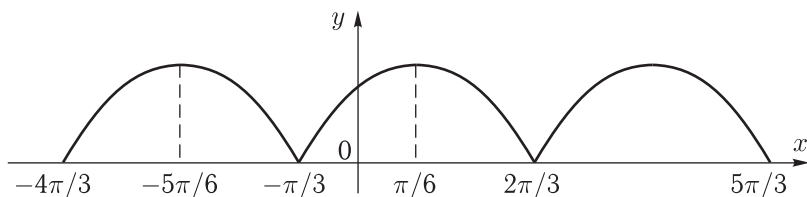


Рис. 1.22

55. У к а з а н и е. Функция $y = |\sin x| + |\cos x|$ является четной и периодической с основным периодом $T = \pi$. Построить график функции на отрезке $[0; \pi]$ и затем продолжить периодически на всю числовую ось (рис. 1.23).

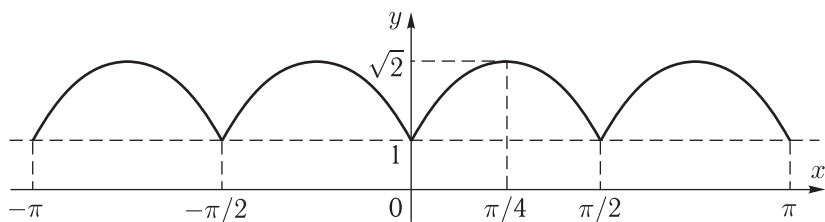


Рис. 1.23

56. Рис. 1.24.

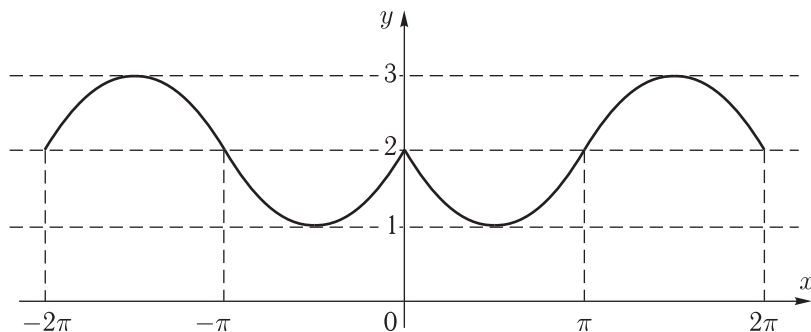


Рис. 1.24

57. Рис. 1.25.

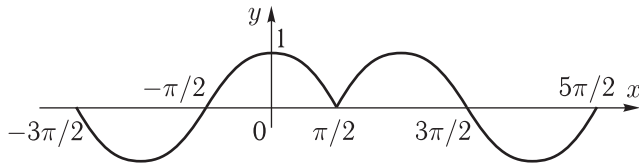


Рис. 1.25

58. $y = \frac{\sin x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \sin x \cdot |\cos x|$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 1.26).

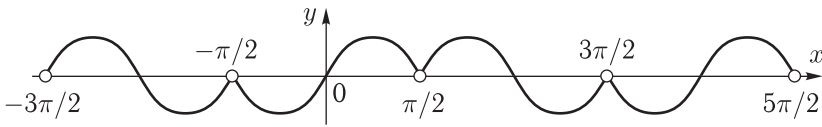


Рис. 1.26

59. $y = \frac{\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{1 + \cos x}} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{|\cos \frac{x}{2}|} =$
 $= \begin{cases} 1, & -\pi + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ -1, & \pi + 2\pi n < x < 3\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$ (рис. 1.27).

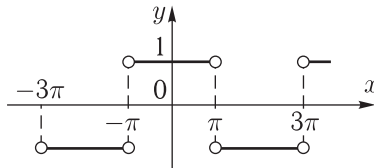


Рис. 1.27

60. $y = \frac{\sqrt{2} \sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = 2 \frac{\sin x}{|\sin x|} \cdot \cos x$ (рис. 1.28).

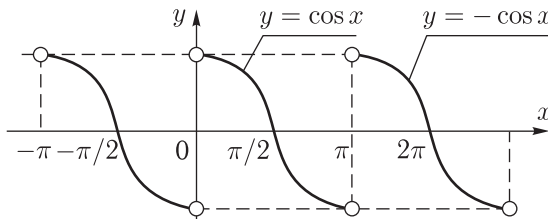


Рис. 1.28

61. Рис. 1.29.

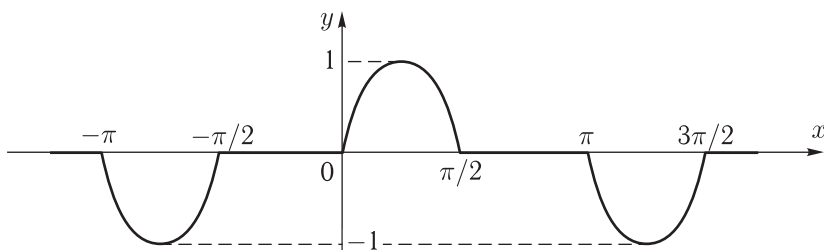


Рис. 1.29

62. Рис. 1.30 (см. пример 1.25).

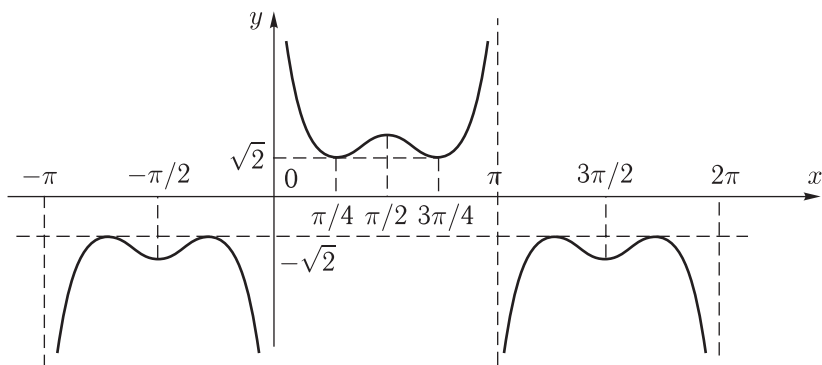


Рис. 1.30

63. 3) ($p_{\text{наиб}} = 4$). 64. 4) ($E(y) = 12\frac{4}{5}$). 65. $x = -0,3$.
 66. 640. 68. У к а з а н и е. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. 69. Нечетная. 70. 1) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$;
 2) $f_{\max} = 1$; $f_{\min} = \frac{1}{2}$. 71. $p \in (-\infty; -7) \cup (11; +\infty)$. 72. 2.
 73. 1). 74. 195. 75. 2) ($[-1; \cos 2]$).

Раздел 2

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ, ТОЖДЕСТВА И ВЫЧИСЛЕНИЯ

2.1. Тригонометрические формулы

Успех решения тригонометрических уравнений и неравенств, доказательства тригонометрических тождеств и решения вычислительных задач в значительной мере определяется знанием основных формул тригонометрии. Это непростая задача для каждого изучающего тригонометрию, потому что только основных формул тригонометрии более 30. Одновременно необходимо знать различные приемы преобразования тригонометрических выражений из одного вида в другой (тригонометрические тождества).

Данное замечание в полной мере относится и к обратным тригонометрическим функциям (подраздел 3.2) и связанным с ними формулам. Это еще больше увеличивает формульную базу тригонометрии. Поэтому каждому, кто начинает изучать расширенный курс тригонометрии, нужно настроиться на серьезную и систематическую работу. Правильный путь изучения и запоминания формул тригонометрии заключается в последовательном выводе этих формул. Механическое заучивание формул приводит к тому, что они быстро забываются и перемешиваются в сознании.

Замечание 1. Следуя сложившейся традиции, будем обозначать аргументы тригонометрических функций в приводимых ниже формулах греческими буквами α , β , γ , а не латинскими x , y , z , которые использовались в разделе 1.

Замечание 2. Для придания тригонометрическим формулам лучшей читаемости будем записывать их без указания допустимых значений аргументов.

1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha. \quad (2.4)$$

2. Тригонометрические функции суммы и разности углов:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad (2.5)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \quad (2.6)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (2.7)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta, \quad (2.8)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (2.9)$$

3. Тригонометрические функции двойного и тройного аргументов:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (2.10)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad (2.11)$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1, \quad (2.12)$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha, \quad (2.13)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad (2.14)$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha, \quad (2.15)$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha. \quad (2.16)$$

4. Формулы понижения степени:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad (2.17)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}. \quad (2.18)$$

5. Тригонометрические функции половинного аргумента:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, & \text{если } \sin \frac{\alpha}{2} \geq 0, \\ -\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, & \text{если } \sin \frac{\alpha}{2} < 0, \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, & \text{если } \cos \frac{\alpha}{2} \geq 0, \\ -\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, & \text{если } \cos \frac{\alpha}{2} < 0, \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}, & \text{если } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \geq 0, \\ -\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}, & \text{если } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} < 0, \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad (2.22)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (2.23)$$

6. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)], \quad (2.24)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)], \quad (2.25)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]. \quad (2.26)$$

7. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (2.27)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad (2.28)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (2.29)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}, \quad (2.30)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}. \quad (2.31)$$

8. Формулы, выражающие $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ через $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ (универсальная подстановка):

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (2.32)$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (2.33)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (2.34)$$

Покажем, как выводятся некоторые из приведенных формул.

1. Основное тригонометрическое тождество (2.1) следует непосредственно из определения функций синус и косинус (см. п. 1.1.1, рис. 1.1).

Докажем тождество (2.3):

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

Аналогично доказывается тождество (2.4).

2. Тождества (2.5)–(2.8) являются основными в списке формул тригонометрии, поскольку все остальные формулы (2.9)–(2.34) выводятся из них либо прямо, либо опосредствованно.

Выведем формулу (2.8). На единичной окружности возьмем точки $M_\alpha(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $M_\beta(\cos \beta, \sin \beta)$ (рис. 2.1) и образуем векторы $\overrightarrow{OM}_\alpha$ и $\overrightarrow{OM}_\beta$. Здесь $0 \leq \alpha < 2\pi$, $0 \leq \beta < 2\pi$.

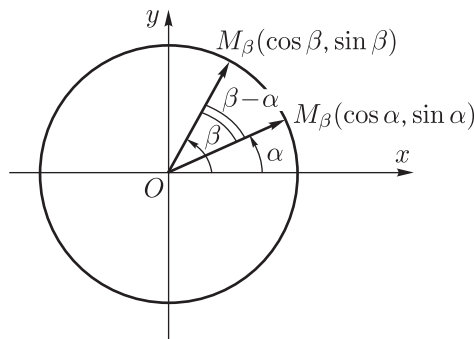


Рис. 2.1

Вычислим скалярное произведение $(\overrightarrow{OM}_\alpha, \overrightarrow{OM}_\beta)$. В соответствии с определением скалярного произведения $((\vec{a}, \vec{b})) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ имеем

$$(\overrightarrow{OM}_\alpha, \overrightarrow{OM}_\beta) = |\overrightarrow{OM}_\alpha| \cdot |\overrightarrow{OM}_\beta| \cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha - \beta). \quad (2.35)$$

С другой стороны, векторы $\overrightarrow{OM}_\alpha$ и $\overrightarrow{OM}_\beta$ заданы своими координатами и потому, в соответствии с правилом вычисления скалярного произведения векторов в координатной форме, имеем

$$(\overrightarrow{OM}_\alpha, \overrightarrow{OM}_\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (2.36)$$

Из (2.35) и (2.36) следует, что

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Формула (2.8) выведена в предположении, что $\alpha, \beta \in [0; 2\pi)$. Однако она справедлива для любых значений α, β . Действительно, если $\alpha = \alpha_0 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\beta = \beta_0 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ и $\alpha_0, \beta_0 \in [0; 2\pi)$, то

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha_0 + 2\pi n - \beta_0 - 2\pi m) = \\ &= \cos(\alpha_0 - \beta_0 + 2\pi(n - m)) = \\ &= \cos(\alpha_0 - \beta_0) = \cos \alpha_0 \cos \beta_0 + \sin \alpha_0 \sin \beta_0 = \\ &= \cos(\alpha_0 + 2\pi m) \cos(\beta_0 + 2\pi n) + \sin(\alpha_0 + 2\pi n) \sin(\beta_0 + 2\pi m) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Для вывода формулы (2.9) достаточно воспользоваться определением тангенса и формулами (2.5), (2.7) синуса и косинуса суммы углов:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}.$$

Разделив числитель и знаменатель на $\cos \alpha \cdot \cos \beta$ при условии $\cos \alpha \neq 0$, $\cos \beta \neq 0$, получим искомый результат:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}, \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

3. Формулы двойного аргумента (угла) (2.10), (2.11) и (2.14) следуют из формул (2.5), (2.7) и (2.9) соответственно, если в последних принять $\beta = \alpha$. Например,

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha,$$

или

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Из этой формулы с учетом основного тригонометрического тождества (2.1) следуют формулы (2.12) и (2.13).

Докажем справедливость тождества (2.15). Поскольку

$$3\alpha = 2\alpha + \alpha,$$

то

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha.$$

Выполнив замены $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, а $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$, получим, что

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \cdot \sin \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Аналогично доказывается тождество (2.16).

4. Формулы понижения степени (2.17) и (2.18) следуют из формул (2.12) и (2.13). Действительно

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5. Формулы (2.19) и (2.20) следуют непосредственно из формул (2.17) и (2.18). Необходимо лишь заменить в этих формулах аргумент α на $\frac{\alpha}{2}$.

Докажем формулы (2.22) и (2.23):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \alpha \neq \pi(2n + 1), \quad n \in \mathbb{Z}; \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

6. Сложив левые и правые части формул (2.5) и (2.6), получим

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta,$$

откуда

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)].$$

Аналогично из (2.7) и (2.8) выводятся формулы (2.25) и (2.26).

7. Формулы (2.27)–(2.30) выводятся из формул (2.24)–(2.26). Покажем, как выводится формула (2.27). Примем в (2.24) обозначения

$$\alpha + \beta = x, \quad \alpha - \beta = y \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{x+y}{2}; \quad \beta = \frac{x-y}{2}.$$

В новых обозначениях получим

$$\sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} (\sin x + \sin y),$$

откуда

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

а это и есть формула (2.27), только в иных обозначениях аргументов. ■

Применив этот прием к формулам (2.25), (2.26), получим формулы (2.29) и (2.30).

8. Покажем, как выражаются $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ через $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \\ \cos \alpha &= \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.2. Тригонометрические тождества

Приведенные в подразделе 2.1 формулы, как уже отмечалось, являются *основными* тригонометрическими тождествами. Вообще же список тригонометрических тождеств существенно шире. Некоторые из них носят тренировочный характер и призваны способствовать лучшему усвоению основных тригонометрических тождеств. Другие сами являются важными тригонометрическими тождествами, и на них следует обратить особое внимание, равно как и на процесс их доказательства. Такие тождества отмечены здесь и далее значком (!).

(!) **Пример 2.1.** Докажите тождества:

$$\text{а) } \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x; \quad (2.37)$$

$$\text{б) } \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x. \quad (2.38)$$

Решение. а) *Способ 1.* Возведем обе части тождества $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ в квадрат. Получим

$$\begin{aligned} \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^4 x &= 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^4 x &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x. \end{aligned}$$

Способ 2. Выполнив очевидные тождественные преобразования, будем иметь

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &= \\ &= [(\sin^2 x)^2 + 2 \sin^2 x \cos^2 x + (\cos^2 x)^2] - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{1}{2} (2 \sin x \cos x)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

б) *Способ 1.*

$$\begin{aligned} (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 &= 1^3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^6 x + 3 \sin^4 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x \cos^4 x + \cos^6 x &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^6 x + \cos^6 x &= 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^6 x + \cos^6 x &= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x. \end{aligned}$$

Способ 2. Воспользовавшись формулой суммы кубов ($a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$), получим

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x) [(\sin^2 x)^2 - \sin^2 x \cos^2 x + (\cos^2 x)^2] = \\ &= [(\sin^2 x)^2 + 2 \sin^2 x \cos^2 x + (\cos^2 x)^2] - 3 \sin^2 x \cos^2 x = \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{3}{4} (2 \sin x \cos x)^2 = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 2.2. Докажите тождество

$$\sin x + \cos x + \sin 5x + \cos 5x = 2\sqrt{2} \cos 2x \cdot \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right).$$

Решение. Перегруппируем слагаемые в левой части тождества и преобразуем суммы синусов и косинусов в произведения по формулам (2.27) и (2.29):

$$\begin{aligned} (\sin x + \sin 5x) + (\cos x + \cos 5x) &= \\ &= 2 \sin \frac{x+5x}{2} \cos \frac{x-5x}{2} + 2 \cos \frac{x+5x}{2} \cos \frac{x-5x}{2} = \\ &= 2 \cos 2x (\sin 3x + \cos 3x) = 2 \cos 2x \left[\sin 3x + \sin \left(\frac{\pi}{2} + 3x \right) \right] = \\ &= 2 \cos 2x \cdot 2 \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} \cos 2x \cdot \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 2.3. Докажите тождество

$$\frac{\sin x - 2 \sin 2x + \sin 3x}{\cos x - 2 \cos 2x + \cos 3x} = \operatorname{tg} 2x, \quad x \neq 2\pi n, \quad x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решение. В соответствии с формулами (2.27) и (2.29) получаем

$$\begin{aligned} \frac{(\sin x + \sin 3x) - 2 \sin 2x}{(\cos x + \cos 3x) - 2 \cos 2x} &= \frac{2 \sin 2x \cos x - 2 \sin 2x}{2 \cos 2x \cos x - 2 \cos 2x} = \\ &= \frac{2 \sin 2x (\cos x - 1)}{2 \cos 2x (\cos x - 1)} = \operatorname{tg} 2x. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(!) **Пример 2.4.** Докажите тождество

$$16 \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{\sin 16x}{\sin x}, \quad x \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решение.

$$16 \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{\sin x} \cdot 16 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} 2 \sin x \cos x &= \sin 2x, & 2 \sin 2x \cos 2x &= \sin 4x, \\ 2 \sin 4x \cos 4x &= \sin 8x, & 2 \sin 8x \cos 8x &= \sin 16x, \end{aligned}$$

то

$$16 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \sin 16x,$$

и окончательно

$$16 \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{\sin 16x}{\sin x}. \quad \blacksquare$$

(!) **Пример 2.5.** Докажите тождество

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx &= \\ &= \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \quad x \neq 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2.39) \end{aligned}$$

Решение.

$$\begin{aligned} A(x) &\equiv \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = \\ &= \frac{2 \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} (\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(2 \sin \frac{x}{2} \sin x + 2 \sin \frac{x}{2} \sin 2x + \dots + 2 \sin \frac{x}{2} \sin nx \right). \end{aligned}$$

Преобразовав произведения $2 \sin \frac{x}{2} \sin kx$, $k = 1, 2, \dots, n$, в суммы по формуле (2.26), т. е.

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x}{2} \sin kx &= \cos \left(\frac{x}{2} - kx \right) - \cos \left(\frac{x}{2} + kx \right) = \\ &= \cos \frac{2k-1}{2}x - \cos \frac{2k+1}{2}x, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left[\left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3}{2}x \right) + \left(\cos \frac{3}{2}x - \cos \frac{5}{2}x \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos \frac{5}{2}x - \cos \frac{7}{2}x \right) + \dots + \left(\cos \frac{2n-1}{2}x - \cos \frac{2n+1}{2}x \right) \right] = \\ &= \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

На последнем шаге разность косинусов преобразована в произведение по формуле (2.30). ■

В примерах 2.4 и 2.5 использован прием домножения произведения (пример 2.4) или алгебраической суммы (пример 2.5) тригонометрических функций на некоторую тригонометрическую функцию. Последняя подбирается так, чтобы применение соответствующих формул привело к упрощению всего выражения.

В примере 2.4 выбор такой функции подсказывает последовательное удвоение аргументов косинусов и структура формулы синуса двойного аргумента. В примере 2.5 функция, на кото-

рую умножается алгебраическая сумма синусов, выбирается так, чтобы последующее применение формулы преобразования произведения синусов в разность косинусов (формула 2.26), привело к взаимному уничтожению максимального числа слагаемых.

Например, упрощение алгебраических сумм вида

$$\sin x + \sin(x + \alpha) + \sin(x + 2\alpha) + \dots + \sin(x + n\alpha)$$

или

$$\cos x + \cos(x + \alpha) + \cos(x + 2\alpha) + \dots + \cos(x + n\alpha)$$

достигается умножением и делением их правых частей на $\sin \frac{\alpha}{2}$.

Прием домножения является эффективным способом решения многих задач тригонометрии (см. примеры 2.19, 2.20, 4.26).

Пример 2.6. Докажите тождество

$$\frac{\sqrt{1 + \cos x} - \sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 - \cos x}} = \frac{1 - |\sin x|}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решение. Умножив числитель и знаменатель левой части тождества на выражение $\sqrt{1 + \cos x} - \sqrt{1 - \cos x}$, сопряженное к $\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 - \cos x}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{1 + \cos x} - \sqrt{1 - \cos x})^2}{(\sqrt{1 + \cos x})^2 - (\sqrt{1 - \cos x})^2} &= \\ &= \frac{1 + \cos x - 2\sqrt{1 - \cos^2 x} + 1 - \cos x}{1 + \cos x - 1 + \cos x} = \\ &= \frac{2(1 - \sqrt{\sin^2 x})}{2 \cos x} = \frac{1 - |\sin x|}{\cos x}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 2.7. Докажите тождество

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \cos 4x} + \sqrt{1 - \cos 4x} &= 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right), \\ \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Решение. Воспользуемся формулами (2.17) и (2.18) для преобразования выражений под знаками радикалов:

$$\begin{aligned} A(x) \equiv \sqrt{1 + \cos 4x} + \sqrt{1 - \cos 4x} &= \\ &= \sqrt{2 \cos^2 2x} + \sqrt{2 \sin^2 2x} = \sqrt{2} (|\cos 2x| + |\sin 2x|). \end{aligned}$$

При $\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$|\cos 2x| = \cos 2x, \quad |\sin 2x| = \sin 2x,$$

поэтому

$$\begin{aligned} A(x) &= \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) = \sqrt{2} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} + 2x \right) + \sin 2x \right] = \\ &= 2\sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \frac{\pi}{4} = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 2.8. Докажите тождество

$$A(x) \equiv \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 4 \cos \frac{x}{2} \cos x \cos \frac{5}{2}x.$$

Решение. Аналогично примеру 2.2 получаем

$$\begin{aligned} A(x) &\equiv (\cos x + \cos 4x) + (\cos 2x + \cos 3x) = \\ &= 2 \cos \frac{5}{2}x \cos \frac{3}{2}x + 2 \cos \frac{5}{2}x \cos \frac{x}{2} = \\ &= 2 \cos \frac{5}{2}x \left(\cos \frac{3}{2}x + \cos \frac{x}{2} \right) = 4 \cos \frac{x}{2} \cos x \cos \frac{5}{2}x. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 2.9. Докажите тождества:

- а) $4(\cos^6 x + \sin^6 x) - 3 \cos^2 2x = 1$;
 б) $\frac{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}{\sin^4 x + \cos^4 x - 1} = \frac{3}{2}, x \neq \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}.$

Решение. Воспользуемся результатами примера 2.1:

- а) $4 \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \right) - 3 \cos^2 2x = 4 - 3(\sin^2 2x + \cos^2 2x) = 1$;
 б) $\frac{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}{\sin^4 x + \cos^4 x - 1} = \frac{1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x - 1}{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x - 1} = \frac{3}{2}. \quad \blacksquare$

Пример 2.10. Докажите, что для всех $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2}m, m \in \mathbb{Z}$, справедливо неравенство

$$\cos^{2n} x + \sin^{2k} x < 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2, \quad k \geq 2.$$

Решение. Если $x = \frac{\pi}{2}m, m \in \mathbb{Z}$, то $\cos^{2n} x + \sin^{2k} x = 1$.

Для $x \neq \frac{\pi}{2}m, m \in \mathbb{Z}$: $|\cos x| < 1$ и $|\sin x| < 1$. Поэтому

$$0 < \cos^{2n} x < \cos^2 x \quad \text{и} \quad 0 < \sin^{2k} x < \sin^2 x.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$0 < \cos^{2n} x + \sin^{2k} x < \cos^2 x + \sin^2 x = 1. \quad \blacksquare$$

(!) **Пример 2.11.** Докажите тождества:

$$\text{а) } \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3 + \cos 4x}{4}; \quad (2.40)$$

$$\text{б) } \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5 + 3 \cos 4x}{8}; \quad (2.41)$$

$$\text{в) } \cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x; \quad (2.42)$$

$$\text{г) } \cos^6 x - \sin^6 x = \frac{1}{4} \cos 2x (3 + \cos^2 x) = \frac{1}{8} \cos 2x (7 + \cos 4x). \quad (2.43)$$

Решение. а), б) Заменяя в тождествах (2.37) и (2.38) (пример 2.1) $\sin^2 2x$ на $\frac{1 - \cos 4x}{2}$, получим тождества (2.40) и (2.41);

$$\text{в) } \cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos 2x;$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \cos^6 x - \sin^6 x &= (\cos^2 x)^3 - (\sin^2 x)^3 = (\cos^2 x - \sin^2 x) \times \\ &\times [(\cos^2 x)^2 + \cos^2 x \sin^2 x + (\sin^2 x)^2] = \cos 2x \left\{ (\cos^2 x)^2 + \right. \\ &+ 2 \cos^2 x \sin^2 x + (\sin^2 x)^2 \left. \right\} - \cos^2 x \sin^2 x = \cos 2x \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 2x \right) = \\ &= \frac{1}{4} \cos 2x (4 - (1 - \cos^2 2x)) = \frac{1}{4} \cos 2x (3 + \cos^2 2x) = \frac{1}{4} \cos 2x \times \\ &\times \left(3 + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) = \frac{1}{8} \cos 2x (7 + \cos 4x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.3. Вычисление тригонометрических выражений

(!) **Пример 2.12.** При условии $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = a$, $|a| \geq 2$ вычислите: а) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$; б) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x$; в) $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x$.

Решение. а) Возведя в квадрат равенство $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = a$, получим

$$\operatorname{tg}^2 x + 2 + \operatorname{ctg}^2 x = a^2 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = a^2 - 2.$$

Аналогично:

$$\text{б) } (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^3 = a^3 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^3 x + 3 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) + \operatorname{ctg}^3 x = a^3 \Rightarrow \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x = a^3 - 3a.$$

$$\text{в) } (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x)^2 = (a^2 - 2)^2 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^4 x + 2 + \operatorname{ctg}^4 x = a^4 - 4a^2 + 4 \Rightarrow \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x = a^4 - 4a^2 + 2.$$

Ответ: а) $a^2 - 2$; б) $a^3 - 3a$; в) $a^4 - 4a^2 + 2$.

(!) **Пример 2.13.** Докажите, что для всех действительных x выполняется неравенство

$$\sqrt[3]{1 + \cos x} + \sqrt[3]{1 - \cos x} \geq \sqrt[3]{2}.$$

Решение. $\sqrt[3]{1 + \cos x} + \sqrt[3]{1 - \cos x} = \sqrt[3]{2 \cos^2 \frac{x}{2}} +$
 $+ \sqrt[3]{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \sqrt[3]{2} \left(\cos^{2/3} \frac{x}{2} + \sin^{2/3} \frac{x}{2} \right) \geq \sqrt[3]{2} \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) =$
 $= \sqrt[3]{2}.$

Здесь использовано следующее свойство чисел $t \in [0, 1]$: $t^m \leq t \leq \sqrt[n]{t}$, при $m \geq 2$, $n \geq 2$, причем $t^m = t = \sqrt[n]{t}$ только при $t = 0$ и $t = 1$. В соответствии с этим свойством

$$\cos^2 \frac{x}{2} \leq \sqrt[3]{\cos^2 \frac{x}{2}} \quad \text{и} \quad \sin^2 \frac{x}{2} \leq \sqrt[3]{\sin^2 \frac{x}{2}},$$

откуда

$$\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \leq \sqrt[3]{\cos^2 \frac{x}{2}} + \sqrt[3]{\sin^2 \frac{x}{2}}. \quad \blacksquare$$

Пример 2.14. Вычислите

$$A = \frac{\sin 130^\circ \cdot \sin 70^\circ - \sin 140^\circ \sin 160^\circ}{\sin 175^\circ \cdot \sin 115^\circ - \sin 85^\circ \cos 115^\circ}.$$

Решение. Воспользуемся формулами приведения для преобразования выражений

а) в числителе: $\sin 130^\circ = \sin(180^\circ - 50^\circ) = \sin 50^\circ$; $\sin 70^\circ = \sin(90^\circ - 20^\circ) = \cos 20^\circ$; $\sin 140^\circ = \sin(90^\circ + 50^\circ) = \cos 50^\circ$; $\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ$;

б) в знаменателе: $\sin 175^\circ = \cos 85^\circ$; $\sin 115^\circ = \cos 25^\circ$; $\cos 115^\circ = -\sin 25^\circ$.

В результате имеем

$$A = \frac{\sin 50^\circ \cos 20^\circ - \cos 50^\circ \sin 20^\circ}{\cos 85^\circ \cos 25^\circ + \sin 85^\circ \sin 25^\circ} = \frac{\sin(50^\circ - 20^\circ)}{\cos(85^\circ - 25^\circ)} = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 2.15. Вычислите $A = \frac{\sin 15^\circ - \sqrt{3} \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ \sin 15^\circ}$.

Решение. $\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^\circ$; $\operatorname{ctg} 30^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow A = \frac{\sin 15^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \sin 15^\circ}.$$

Разделим числитель и знаменатель на $\cos 15^\circ$:

$$A = \frac{\operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 15^\circ} = \operatorname{tg}(15^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1.$$

Ответ: -1.

Пример 2.16. Вычислите

$$A = \operatorname{tg} 6^\circ \operatorname{tg} 12^\circ \operatorname{tg} 18^\circ \dots \operatorname{tg} 78^\circ \operatorname{tg} 84^\circ.$$

Решение. Число A равно произведению 14 чисел ($84 : 6 = 14$) вида $\operatorname{tg}(n \cdot 6^\circ)$, $n = 1, 2, \dots, 14$. Поскольку $\operatorname{tg} 84^\circ = \operatorname{ctg} 6^\circ$; $\operatorname{tg} 78^\circ = \operatorname{ctg} 12^\circ$, ..., $\operatorname{tg} 48^\circ = \operatorname{ctg} 42^\circ$, то

$$A = (\operatorname{tg} 6^\circ \cdot \operatorname{ctg} 6^\circ) \cdot (\operatorname{tg} 12^\circ \cdot \operatorname{ctg} 12^\circ) \dots (\operatorname{tg} 42^\circ \cdot \operatorname{ctg} 42^\circ) = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 2.17. Вычислите: $\sin 15^\circ$; $\cos 15^\circ$.

Решение. *Способ 1.*

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Аналогично } \cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \dots = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{Способ 2. } \sin 15^\circ &= \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}; \quad \cos 15^\circ = \\ &= \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } \sin 15^\circ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}; \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}. \end{aligned}$$

Замечание. Легко видеть, что

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}}{4} = \frac{\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}}{4} = \frac{2\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{4} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

$$\text{Аналогично показывается, что } \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

(!) **Пример 2.18.** Вычислите: $\sin 18^\circ$; $\cos 36^\circ$.

Решение. Имеем

$$\sin 54^\circ = \cos 36^\circ \Leftrightarrow \sin(3 \cdot 18^\circ) = \cos(2 \cdot 18^\circ).$$

Воспользовавшись формулами синуса тройного аргумента и косинуса двойного аргумента, получим равенство

$$3 \sin 18^\circ - 4 \sin^3 18^\circ = 1 - 2 \sin^2 18^\circ.$$

Обозначив $\sin 18^\circ = t$, будем иметь

$$\begin{aligned} 4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 = 0 &\Leftrightarrow (4t^3 - 4t^2) + (2t^2 - 2t) - (t - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (t - 1)(4t^2 + 2t - 1) = 0 \Rightarrow t_1 = 1, \quad t_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}. \end{aligned}$$

Поскольку $0 < \sin 18^\circ < \frac{1}{2}$, то подходит только $t = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

Тогда

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \quad \cos 36^\circ = 1 - 2 \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right)^2 = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}; \quad \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

Пример 2.19. Вычислите $A = \sin \frac{3}{10}\pi - \cos \frac{2}{5}\pi$.

Решение. Решение данного примера выполним с использованием приема домножения исходного выражения (или полученного из него в результате тождественных преобразований) на значение некоторой тригонометрической функции (в данном случае на $\cos \frac{\pi}{10}$). Решение выполним тремя способами, которые различаются используемыми тригонометрическими формулами при выполнении тождественных преобразований.

$$\begin{aligned} \text{Способ 1. } A &= \sin \frac{3}{10}\pi - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{5}\pi \right) = \sin \frac{3}{10}\pi - \sin \frac{\pi}{10} = \\ &= \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{10}} \left(2 \cos \frac{\pi}{10} \sin \frac{3}{10}\pi - 2 \cos \frac{\pi}{10} \sin \frac{\pi}{10} \right) = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{10}} \left(\sin \frac{2}{5}\pi + \right. \\ &\left. + \sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} \right) = \frac{\sin \frac{2}{5}\pi}{2 \cos \frac{\pi}{10}} = \frac{\cos \frac{\pi}{10}}{2 \cos \frac{\pi}{10}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Способ 2. Воспользовавшись формулой разности синусов, получим

$$\begin{aligned} A &= \sin \frac{3}{10}\pi - \sin \frac{\pi}{10} = 2 \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5} = \\ &= \frac{2 \left(2 \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{10} \right)}{2 \cos \frac{\pi}{10}} \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 \sin \frac{2}{5}\pi}{2 \cos \frac{\pi}{10}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Способ 3. В соответствии с формулой (2.15)

$$\sin \frac{3}{10}\pi = \sin \left(3 \cdot \frac{\pi}{10} \right) = 3 \sin \frac{\pi}{10} - 4 \sin^3 \frac{\pi}{10}.$$

С учетом данного результата

$$\begin{aligned} A &= 2 \sin \frac{\pi}{10} - 4 \sin^3 \frac{\pi}{10} = 2 \sin \frac{\pi}{10} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{10} \right) = \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5} = \frac{2 \left(2 \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{10} \right)}{2 \cos \frac{\pi}{10}} \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $A = \frac{1}{2}$.

Отметим, что использование результатов решения примера 2.18 позволяет вычислить искомое значение A в примере 2.19 следующим образом:

$$A = \sin \frac{3}{10}\pi - \sin \frac{\pi}{10} = \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} - \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{1}{2}.$$

(!) **Пример 2.20.** Вычислите $A = \cos^6 \frac{11}{12}\pi - \sin^6 \frac{\pi}{12}$.

Решение. Воспользовавшись тождеством (2.43):

$$\cos^6 x - \sin^6 x = \frac{1}{4} \cos 2x (3 + \cos^2 2x),$$

$$\begin{aligned} \text{получим } A &= \cos^6 \frac{11}{12}\pi - \sin^6 \frac{\pi}{12} = \cos^6 \frac{\pi}{12} - \sin^6 \frac{\pi}{12} = \\ &= \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{6} \left(3 + \cos^2 \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{3}}{2} \left(3 + \frac{3}{4} \right) = \frac{15\sqrt{3}}{32}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{15\sqrt{3}}{32}$.

(!) **Пример 2.21.** Вычислите

$$A = \cos^2 10^\circ - \sin^2 70^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 50^\circ.$$

Решение. Основной способ решения тригонометрических задач (вычислительных, как в данном примере, а также тригонометрических уравнений и неравенств), в которые входят основные тригонометрические функции синус и косинус в четных степенях, заключается в применении формул понижения степени. Решение данного примера после применения формул понижения степени выполнено двумя способами.

Способ 1.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1 + \cos 20^\circ}{2} - \frac{1 - \cos 140^\circ}{2} + \frac{1 + \cos 60^\circ}{2} - \frac{1 - \cos 100^\circ}{2} = \\
 &= \frac{1}{2}[(\cos 20^\circ + \cos 140^\circ) + (\cos 60^\circ + \cos 100^\circ)] = \\
 &= \cos 80^\circ \cdot \cos 60^\circ + \cos 80^\circ \cos 20^\circ = \\
 &= \cos 80^\circ (\cos 60^\circ + \cos 20^\circ) = 2 \cos 80^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ = \\
 &= \frac{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1 \sin 160^\circ}{4 \sin 20^\circ} = \frac{1 \sin 20^\circ}{4 \sin 20^\circ} = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

Этот способ, хотя и более длинный, еще раз демонстрирует прием домножения выражения, использованный в примерах 2.4 и 2.5.

В процессе вычислений последовательно были применены формулы понижения степени (2.17), (2.18), формула (2.29) преобразования суммы косинусов в произведение. На последнем шаге для вычисления $2 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ использован прием домножения на $\sin 20^\circ$.

Способ 2.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1 + \cos 20^\circ}{2} - \frac{1 - \cos 140^\circ}{2} + \frac{1 + \cos 60^\circ}{2} - \frac{1 - \cos 100^\circ}{2} = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \cos 20^\circ + \cos 140^\circ + \cos 100^\circ \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 2 \cos 80^\circ \cos 60^\circ + \cos 100^\circ \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \cos 80^\circ - \cos 80^\circ \right) = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

При решении примера этим способом использованы равенство $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, формула (2.29) и формула приведения ($\cos 100^\circ = -\cos(180^\circ - 100^\circ) = -\cos 80^\circ$).

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Пример 2.22. Вычислите $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, если $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$.

Решение. Выразив $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ по формулам (2.32) и (2.33), получим

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{5}, \quad x \neq \pi(2n + 1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Заменим $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Тогда $\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 3t^2 - 5t - 2 = 0$.

Его корни $t_1 = 2$, $t_2 = -\frac{1}{3}$.

В первой четверти $1 \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$ (почему?), а в третьей $\sin x + \cos x < 0$. Поэтому аргумент x принадлежит либо второй, либо четвертой четверти; соответственно аргумент $\frac{x}{2}$ — первой или второй. Если $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, то $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2$; если $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$, то $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{1}{3}$.

Ответ: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{1}{3}$, если $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$; $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2$, если $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Пример 2.23. Вычислите $\sin x$, если $\operatorname{tg} x = 3$ и $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$.

Решение. Если $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$, то $\sin x < 0$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \sin x &= -\sqrt{\sin^2 x} = -\sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}} = -\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \\ &= -\frac{|\operatorname{tg} x|}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = -\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \text{ и } \sin x = -\frac{3}{\sqrt{10}}. \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{3}{\sqrt{10}}$.

Пример 2.24. Вычислите $\cos 2x$, если $\sin \frac{x}{2} = \frac{3}{4}$.

Решение. Поскольку $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$, а $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, то $\cos 2x = 2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right)^2 - 1$. Поэтому

$$\cos 2x = 2 \left(1 - 2 \cdot \frac{9}{16}\right)^2 - 1 = -\frac{31}{32}.$$

Ответ: $-\frac{31}{32}$.

Пример 2.25. Вычислите

$$A = \frac{\sin 20^\circ \cos 40^\circ \cos 50^\circ \sin 70^\circ}{\cos 20^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ \cos 70^\circ}.$$

Решение. Заметив, что $\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \operatorname{tg} 20^\circ$, $\frac{\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} = \operatorname{ctg} 40^\circ$ и т. д., получим

$$A = \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{ctg} 40^\circ \operatorname{ctg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ = (\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{ctg} 20^\circ) \cdot (\operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{ctg} 50^\circ) = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 2.26. Вычислите

$$A = \frac{\sin 100^\circ + 2 \sin 200^\circ}{\sin 10^\circ}.$$

Решение. Так как $\sin 200^\circ = \sin(180^\circ + 20^\circ) = -\sin 20^\circ$, то

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\sin 100^\circ - \sin 20^\circ) - \sin 20^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{2 \sin 40^\circ \cos 60^\circ - \sin 20^\circ}{\sin 10^\circ} = \\ &= \frac{\sin 40^\circ - \sin 20^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{2 \sin 10^\circ \cos 30^\circ}{\sin 10^\circ} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

Пример 2.27. Вычислите

$$A = \frac{\sin 1,9\pi \cdot \cos 2,7\pi \cdot \operatorname{tg} 3,3\pi}{\cos 0,4\pi \sin 1,7\pi}.$$

Решение. Применив формулы приведения, получим

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sin(2\pi - 0,1\pi) \cos(2\pi + 0,7\pi) \operatorname{tg}(3\pi + 0,3\pi)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) \sin(2\pi - 0,3\pi)} = \\ &= \frac{-\sin \frac{\pi}{10} \left(-\cos \frac{3}{10}\pi\right) \operatorname{tg} \frac{3}{10}\pi}{\sin \frac{\pi}{10} \left(-\sin \frac{3}{10}\pi\right)} = -\operatorname{ctg} \frac{3}{10}\pi \operatorname{tg} \frac{3}{10}\pi = -1. \end{aligned}$$

Ответ: -1 .

Пример 2.28. Упростите

$$A = \sqrt{(\cos 20^\circ - \sin 20^\circ)^2} + \sqrt{(\cos 80^\circ - \sin 80^\circ)^2}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} A &= |\cos 20^\circ - \sin 20^\circ| + |\cos 80^\circ - \sin 80^\circ| = \\ &= |\sin 70^\circ - \sin 20^\circ| + |\sin 10^\circ - \sin 80^\circ| = \\ &= (\sin 70^\circ - \sin 20^\circ) + (\sin 80^\circ - \sin 10^\circ) = \\ &= 2 \sin 25^\circ \cos 45^\circ + 2 \sin 35^\circ \cos 45^\circ = \sqrt{2} (\sin 25^\circ + \sin 35^\circ) = \\ &= 2\sqrt{2} \sin 30^\circ \cos 5^\circ = \sqrt{2} \cos 5^\circ. \end{aligned}$$

Ответ: $\sqrt{2} \cos 5^\circ$.

Пример 2.29. Вычислите

$$A = \left| \operatorname{tg} 75^\circ - \sqrt{2} \sin 75^\circ \right| + \left| \sqrt{2} \cos 15^\circ - \operatorname{ctg} 15^\circ \right|.$$

Решение. Поскольку $\operatorname{tg} 75^\circ > \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, а $\sqrt{2} \sin 75^\circ < \sqrt{2}$, то $\operatorname{tg} 75^\circ > \sqrt{2} \sin 75^\circ$ и $|\operatorname{tg} 75^\circ - \sqrt{2} \sin 75^\circ| = \operatorname{tg} 75^\circ - \sqrt{2} \sin 75^\circ$.

Аналогично

$$|\sqrt{2} \cos 15^\circ - \operatorname{ctg} 15^\circ| = |\sqrt{2} \cos 15^\circ - \operatorname{tg} 75^\circ| = \operatorname{tg} 75^\circ - \sqrt{2} \cos 15^\circ.$$

В результате имеем $A = 2 (\operatorname{tg} 75^\circ - \sqrt{2} \cos 15^\circ)$. Далее,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 75^\circ &= \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2}, \\ \cos 15^\circ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(см. пример 2.17), и потому окончательно

$$A = 2 \left(\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2} - \sqrt{2} \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \right) = 3 + \sqrt{3}.$$

Ответ: $3 + \sqrt{3}$.

Пример 2.30. Сравните числа:

а) $\operatorname{ctg} \left(-\frac{11}{4}\pi \right)$ и $\operatorname{tg} \frac{21}{4}\pi$;

б) $\operatorname{ctg}(-2)$ и $\operatorname{tg} 2$;

в) $\sec \frac{28}{3}\pi$ и $\operatorname{tg} \frac{167}{6}\pi$.

Решение. а) $\operatorname{ctg} \left(-\frac{11}{4}\pi \right) = \operatorname{ctg} \left(-3\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$;
 $\operatorname{tg} \frac{21}{4}\pi = \operatorname{tg} \left(5\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, откуда следует, что
 $\operatorname{ctg} \left(-\frac{11}{4}\pi \right) = \operatorname{tg} \frac{21}{4}\pi$;

б) $\operatorname{ctg}(-2) = -\operatorname{ctg} 2$; так как $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$, то $\operatorname{ctg} 2 < 0$ (см. рис. 1.5), а $\operatorname{ctg}(-2) > 0$.

Аналогично получаем, что $\operatorname{tg} 2 < 0$ (рис. 1.4), откуда $\operatorname{tg} 2 < \operatorname{ctg}(-2)$;

в) $\sec \frac{28}{3}\pi = \sec \left(8\pi + \frac{4}{3}\pi \right) = \sec \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\sec \frac{\pi}{3} =$
 $= -\frac{1}{\cos(\pi/3)} = -2$; $\operatorname{tg} \frac{167}{6}\pi = \operatorname{tg} \left(27\pi + \frac{5}{6}\pi \right) = \operatorname{tg} \frac{5}{6}\pi = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} =$
 $= -\frac{\sqrt{3}}{3}$, откуда $\operatorname{tg} \frac{167}{6}\pi > \sec \frac{28}{3}\pi$.

Ответ: а) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{11}{4}\pi\right) = \operatorname{tg}\frac{21}{4}\pi$; б) $\operatorname{tg} 2 < \operatorname{ctg}(-2)$;
 в) $\operatorname{tg}\frac{167}{6}\pi > \operatorname{sec}\frac{28}{3}\pi$.

2.4. Задачи для самостоятельного решения

К подразделу 2.2

Докажите тождества.

1.

$$\text{а) } \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right); \quad (2.44)$$

$$\text{б) } \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right). \quad (2.45)$$

$$2. \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin 2x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$3. \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{ctg} 3x = \frac{8 \cos^2 2x}{\sin 6x}, \quad x \neq \frac{\pi}{6}n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$4. (2 \cos^2 2x + \cos 2x - 1) \sec x = 2 \cos 3x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$5. \sin x - \cos x + \cos 5x - \sin 5x = -2\sqrt{2} \sin 2x \cdot \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$6. \frac{\cos 2x - 4 \cos 3x + \cos 4x}{\sin 2x - 4 \sin 3x + \sin 4x} = \operatorname{ctg} 3x, \quad x \neq \frac{\pi}{3}n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$7. \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$8. \cos^2\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - 2x\right) = \frac{\sqrt{2} \cos 4x}{2}.$$

$$9. \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2 x = \frac{3}{2} + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

(!) 10.

$$\text{а) } \cos^8 x + \sin^8 x = \frac{1}{8}(\sin^4 2x - 8 \sin^2 2x + 8); \quad (2.46)$$

$$\text{б) } \cos^8 x + \sin^8 x = \frac{1}{8}(\cos^4 2x + 6 \cos^2 2x + 1); \quad (2.47)$$

$$\text{в) } \cos^8 x + \sin^8 x = \frac{1}{32}(\cos^2 4x + 14 \cos 4x + 17). \quad (2.48)$$

(!) 11.

$$\text{a) } \cos^8 x - \sin^8 x = \cos 2x \frac{1 + \cos^2 2x}{2}; \quad (2.49)$$

$$\text{б) } \cos^8 x - \sin^8 x = \cos 2x \frac{3 + \cos 4x}{4}; \quad (2.50)$$

$$\text{в) } \cos^8 x - \sin^8 x = \cos 2x (\cos^4 x + \sin^4 x). \quad (2.51)$$

(!) 12.

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}},$$

$$x \neq 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2.52)$$

$$13. \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}} = \frac{1 - |\cos x|}{\sin x}, \quad x \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$14. \frac{\sin 7x + \sin 3x - \sin x - \sin 9x}{\cos x + \cos 3x + \cos 7x + \cos 9x} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 5x, \quad x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \quad x \neq \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$15. \frac{(1 - \cos 4x)(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)}{4 \cos 2x} = \operatorname{tg} 2x, \quad x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \quad x \neq \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$16. \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \quad \text{если } \alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

$$17. \sin 3x \cos^3 x + \cos 3x \sin^3 x = \frac{3}{4} \sin 4x.$$

$$18. \sin 3x \cos^3 x - \cos 3x \sin^3 x = \frac{1}{4} (\sin 6x + 3 \sin 2x).$$

$$19. \cos 3x \cos^3 x + \sin 3x \sin^3 x = \cos^3 2x.$$

$$20. \cos 3x \cos^3 x - \sin 3x \sin^3 x = \frac{1}{4} (1 + 3 \cos 4x).$$

$$21. \sin 3x \cos^3 x - \cos 3x \sin^3 x = \frac{\sin 2x}{2} (3 - 2 \sin^2 2x).$$

$$22. 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\cos^6 x + \sin^6 x) = 1.$$

$$23. \frac{2 \sin 2x - \sin 4x}{2 \sin 2x + \sin 4x} = \operatorname{tg}^2 x.$$

$$24. \frac{2 \cos^2 2x + \operatorname{tg} x - \cos 4x}{2 \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x - \sin 2x \sec^2 x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right), \quad x \neq \frac{\pi}{2}n, \quad x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$25. \frac{\sqrt{1+\cos x} - \sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x} + \sqrt{1-\cos x}} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right), x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

К подразделу 2.3

Вычислите значения выражений (26–46).

$$26. \sin 20^\circ \cos 50^\circ \sin 80^\circ. \quad 27. \sin 63^\circ \sin 18^\circ \sin 27^\circ.$$

$$28. \sin 222^\circ + \sin 78^\circ + \cos 108^\circ.$$

$$29. \cos 223^\circ \cos 557^\circ + \cos 133^\circ \cos 287^\circ.$$

$$30. \frac{\cos 45^\circ \sin 120^\circ + \cos 135^\circ \sin 150^\circ}{\cos 285^\circ \sin 30^\circ + \sin 105^\circ \sin 120^\circ}. \quad 31. \frac{2 \sin 510^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ}{-\sqrt{3} \operatorname{ctg} 480^\circ + \operatorname{ctg} 75^\circ}.$$

$$32. \frac{\sin 70^\circ - 2 \sin 50^\circ}{\cos 80^\circ - 2 \cos 20^\circ} \operatorname{cosec} 10^\circ.$$

$$33. \operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 4.$$

$$34. \operatorname{tg}^{10} \alpha + \operatorname{ctg}^8 \alpha, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = -2.$$

$$35. \frac{\sin 1,3\pi \operatorname{tg} 2,9\pi \cdot \cos 1,4\pi}{\cos 4,2\pi \operatorname{ctg} 1,6\pi \sin 1,1\pi}. \quad 36. \cos^4 \frac{\pi}{8} - \sin^4 \frac{\pi}{8}.$$

$$37. \text{ а) } \cos^6 \frac{\pi}{12} - \sin^6 \frac{11}{12}\pi; \text{ б) } \cos^6 \frac{\pi}{12} + \sin^6 \frac{11}{12}\pi.$$

$$38. \text{ а) } \cos^8 \frac{\pi}{8} - \sin^8 \frac{7}{8}\pi; \text{ б) } \cos^8 \frac{\pi}{8} + \sin^8 \frac{7}{8}\pi; \text{ в) } \cos^8 \frac{\pi}{12} - \sin^8 \frac{\pi}{12}; \text{ г) } \cos^8 \frac{\pi}{12} + \sin^8 \frac{\pi}{12}.$$

$$39. \sin \frac{9}{10}\pi + \cos \frac{11}{5}\pi - 2 \sin \frac{3}{10}\pi.$$

$$40. \cos \frac{\pi}{20} + \cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{3\pi}{20} + \dots + \cos \frac{19\pi}{20}.$$

$$41. (\sin^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ - \sin^2 40^\circ - \cos^2 50^\circ) \operatorname{cosec} 10^\circ.$$

$$42. \sin \alpha, \cos \alpha, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = 2 \text{ и } \alpha \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi \right).$$

$$43. \operatorname{tg} 3\alpha, \text{ если } \sin \alpha + \cos \alpha = 0.$$

$$44. \sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \text{ если } \cos \alpha = -\frac{4}{5} \text{ и } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right).$$

$$45. \sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \text{ если } \sin \alpha = \frac{4}{5} \text{ и } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right).$$

$$46. \sin \alpha, \text{ если } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{3}.$$

47. Определите знак числа $A = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin 2\alpha \cos \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$.

Вычислите значения выражений (48–56).

48. $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, если $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

49. $\operatorname{tg} x$, если $\frac{2 \sin x + 5 \cos x}{3 \sin x - 4 \cos x} = 2$.

50. $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, если: а) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0$; б) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1$; в) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}$.

51. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ и $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$.

52. $\operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, если $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$ и $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$.

53. $\operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, если $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$.

54. $\cos \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{12}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{7}{2}\pi; 4\pi\right)$.

(!) **55.** а) $\sin 2x$; б) $\sin^3 x + \cos^3 x$; в) $\sin^4 x + \cos^4 x$; г) $\sin^6 x + \cos^6 x$, если $\sin x + \cos x = a$.

56. $\cos \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = 5$ и $\sin \alpha < 0$.

57. Упростите: а) $|\cos 154^\circ - \operatorname{tg} 48^\circ| - |\sin 56^\circ - \operatorname{ctg} 42^\circ|$; б) $|\cos 140^\circ - \sin 140^\circ| + |\sin 40^\circ - \cos 40^\circ|$.

Вычислите значения выражений (58–59).

58. а) $|\cos^2 75^\circ - \cos^2 15^\circ| + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} 225^\circ$; б) $A = |\operatorname{tg} 105^\circ - \sqrt{2} \sin 75^\circ| - |\sqrt{2} \cos 15^\circ - \operatorname{ctg} 15^\circ|$.

59. $\sin 15^\circ \left(|\sin 285^\circ - \cos 330^\circ| + \left| \sin 105^\circ - \frac{1}{2} \operatorname{tg} 60^\circ \right| \right)$.

Задачи выпускных и вступительных экзаменов

60. (МГУ, геологический факультет, 2000 г.) Вычислите $\operatorname{tg} 8x$, если $\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{4}$.

61. (МГУ, факультет почвоведения, 2002 г.) Найдите $\operatorname{tg} 3\alpha$, если $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$.

62. (МГУ, факультет почвоведения, 2002 г.) Вычислите $\cos \frac{5}{8}\pi$.

63. (ГУ ВШЭ, 2001 г.) Вычислите $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, если $\cos x = 0,6$ и $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$:

$$1) -\frac{1}{2}; 2) \frac{1}{3}; 3) \frac{1}{2}; 4) -\frac{1}{3}; 5) -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

64. (ГУ ВШЭ, 2001 г.) Числовое значение выражения $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{3\pi}{2} + x \right)$ при условии $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 7$ равно:

$$1) 74; 2) \sqrt{47 \cdot 49}; 3) \frac{344}{7}; 4) 49; 5) 51.$$

65. (ГУ ВШЭ, 2005 г.) Значение выражения $\sin \left(\operatorname{arctg} 3 - \frac{\pi}{4} \right)$ равно:

$$1) \frac{3}{\sqrt{10}}; 2) \frac{3}{5}; 3) \frac{1}{\sqrt{10}}; 4) \frac{4}{5}; 5) \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

66. (ЕГЭ, 2005 г.: В5) Найдите значение выражения $\sqrt{2,25} \sin 2x$, если $\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

67. (ЕГЭ, 2005 г.: В5) Найдите значение выражения $\cos x$, если $\cos 2x = -\frac{7}{8}$ и $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$.

68. (ЕГЭ, 2005 г.) В5. Найдите значение выражения $\sqrt{20} (\sin^2 x - \cos^2 x)$, если $\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $-\frac{3\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{2}$.

69. (ЕГЭ, 2005 г.) В4. Найдите значение выражения

$$3 \sin 21^\circ \cdot \sin 225^\circ \cdot (\sin^2 12^\circ - \cos^2 12^\circ) + \\ + 6 \sin 69^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \sin 12^\circ \cdot \cos 12^\circ.$$

70. (ЕГЭ: В4) Найдите значения выражений:

$$а) 5\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{7} \right) \right); б) 10 \cos \left(\operatorname{arctg} \sqrt{3} \right);$$

$$в) \operatorname{tg}^2 \left(\arccos \left(-\frac{1}{4} \right) \right); г) \operatorname{tg}^2 \left(5 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} - 0,25 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

71. (Централизованное тестирование, математика — 2, 2005 г.) Вычислите $\sin 11^\circ + \sin 51^\circ + \sin 91^\circ + \sin 131^\circ + \sin 171^\circ + \sin 211^\circ + \sin 251^\circ + \sin 291^\circ + \sin 331^\circ$:

$$1) \sin 20^\circ; 2) \sin 29^\circ; 3) -\sin 11^\circ; 4) -\sin 40^\circ; 5) 0.$$

72. (ЕГЭ, 2008 г.: демонстрационный вариант) Вычислите значение выражения $\log_2 \sin \frac{\pi}{12} + \log_2 \sin \frac{\pi}{6} + \log_2 \sin \frac{5\pi}{12}$.

73. (МИЭТ) Вычислите $\sin \left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} \right) + \cos \left(\operatorname{arctg} 2\sqrt{2} \right)$.

74. (МИФИ) Вычислите $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ$.

75. (НижГУ) Вычислите $\sin 70^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 10^\circ$.

76. (РГПУ) Вычислите $\frac{1 - 4 \sin 10^\circ \cdot \sin 70^\circ}{2 \sin 10^\circ}$.

77. (МИЭТ) Вычислите $4 \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$.

78. (МЭСИ) Вычислите $\frac{96 \sin 80^\circ \cdot \sin 65^\circ \cdot \sin 35^\circ}{\sin 20^\circ + \sin 50^\circ + \sin 110^\circ}$.

79. (МГУ, экономический факультет) Вычислите

$$\log_{14/25} |\cos \alpha| + \log_{14/25} |\cos 3\alpha|,$$

если известно, что $\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{\frac{4}{5}}$.

80. (МЭСИ) Вычислите $3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если

$$\sin \alpha + \cos \alpha = 1,4, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}.$$

81. (МЭСИ) Упростите $2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)$.

82. (МЭСИ) Найдите (в градусах) угол $\gamma = \alpha + \beta$, если:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}; \quad \operatorname{tg} \beta = 7; \quad 0 < \alpha < 90^\circ; \quad 0 < \beta < 90^\circ.$$

83. (МЭСИ) Найдите значение выражения

$$\frac{\sin 4\alpha + \sin 10\alpha - \sin 6\alpha}{1 + \cos 2\alpha - 2 \sin^2 4\alpha},$$

если $\sin 2\alpha = 0,75$.

84. (МЭСИ) Вычислите $\sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16}$.

2.5. Ответы

- 26.** $\frac{\sqrt{3}}{8}$. **27.** $\frac{1}{8}$. **28.** 0. **29.** $\frac{1}{2}$. **30.** $2 - \sqrt{3}$. **31.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **32.** 2.
33. 52. **34.** 2. **35.** -1. **36.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **37.** а) $\frac{15\sqrt{3}}{32}$; б) $\frac{13}{16}$. **38.** а) $\frac{3\sqrt{2}}{8}$;

- б) $\frac{17}{32}$; в) $\frac{7\sqrt{3}}{16}$; г) $\frac{97}{128}$. **39.** $-\frac{1}{2}$. **40.** 0. **41.** $\frac{1}{2}$. **42.** $\sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$,
 $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. **43.** 1. **44.** $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$. **45.** $\sin 2\alpha =$
 $= -\frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$. **46.** $\frac{24}{25}$. **47.** $A > 0$. **48.** $\sqrt{2} - 1$. **49.** $\frac{13}{4}$.
50. а) $\sin \alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$; б) $\sin \alpha = 1$, $\cos \alpha = 0$; в) $\sin \alpha =$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$. **51.** $\sqrt{3} - 2$. **52.** $2\sqrt{2}$. **53.** $2 + \sqrt{3}$. **54.** $\frac{12}{13}$.
55. а) $a^2 - 1$; б) $\frac{a}{2}(3 - a^2)$; в) $\frac{1}{2}(1 + 2a^2 - a^4)$; г) $\frac{1}{4}(1 + 6a^2 - 3a^4)$.
56. $-\frac{5}{\sqrt{26}}$. **57.** а) $\sqrt{3} \cos 4^\circ$; б) $2 \cos 40^\circ$. **58.** а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3} + 1$.
59. $\frac{1}{2}$.
60. $\frac{240}{161}$. **61.** $\frac{2}{11}$. **62.** $-\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$. **63.** 1) $(\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{1}{2})$. **64.** 5).
65. 5). **66.** $-1,2$. **67.** $-0,25$. **68.** 4. **69.** 1,5. **70.** а) 7; б) 5; в) 15;
г) 1. **71.** 5) (0). **72.** -3 . **73.** $\frac{14}{15}$. **74.** 4. **75.** $\frac{1}{8}$. **76.** 1. **77.** $\frac{3}{4}$. **78.** 24.
79. 1. **80.** 1. **81.** -1 . **82.** 135° . **83.** 1,5. **84.** 1,5.

Раздел 3

ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ.

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

3.1. Обратные функции

Задачи, в которых фигурируют обратные функции, встречаются в самых различных разделах математики и в ее приложениях. Примерами задач с обратными функциями из школьного курса математики могут служить некоторые классы уравнений и неравенств (см. ниже примеры 3.5, 3.7, 3.8). Важную область математики составляют обратные задачи в теории интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Разработка теории и, в частности, методов решения некорректных обратных задач во второй половине XX в. позволила решать прикладные задачи в самых различных областях, например, в геофизике — обнаружение полезных ископаемых; в микроэлектронике, радиолокации — восстановление «размытых» изображений и т. п.

Напомним определение числовой функции и некоторые связанные с ней понятия.

Определение 3.1. Пусть X — некоторое числовое множество ($X \subset \mathbb{R}$), и пусть указано правило f , в соответствии с которым каждому числу $x \in X$ отвечает единственный элемент (число) $y = f(x)$ из числового множества Y . В этом случае говорят, что на множестве X задана *числовая функция* (далее просто *функция*) $y = f(x)$, $x \in X$, со значениями в множестве Y .

Множество X , на котором определена функция f , называется *областью определения* этой функции и обозначается также $D(f)$. Если множество Y содержит только образы $f(x)$ элементов $x \in X$, т. е.

$$Y = \{y \mid y = f(x), x \in X\},$$

то оно называется *областью значений* функции f и обозначается также $E(f)$ (рис. 3.1). Чтобы подчеркнуть, что множество Y состоит только из образов $f(x)$ элементов $x \in X$, пишут $Y = f(X)$.

Например, если $f(x) = 3x - 2$, $x \in [1; 3]$, то $f([1; 3]) = [1; 7]$.

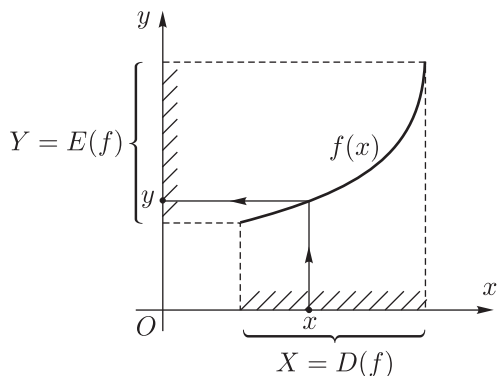


Рис. 3.1

Часто возникают задачи, в которых по заданному значению y_0 из области $E(f) = f(X)$ функции $y = f(x)$, $x \in X$, требуется найти соответствующее значение переменной x , т. е. требуется решить уравнение $f(x) = y_0$, $y_0 \in E(f)$.

Например, функция $y = 2x + 6$, $x \in [1; 4]$, отображает отрезок $X = [1; 4]$ на отрезок $Y = [8; 14]$. Тогда для любого $y_0 \in Y$ уравнение $2x + 6 = y_0$ имеет единственное решение $x = \frac{y_0}{2} - 3$. При этом функция $x \equiv g(y) = \frac{y}{2} - 3$, $y \in [8; 14]$, отображает отрезок Y на отрезок X , т. е. осуществляет обратное отображение.

Не всякое уравнение $f(x) = y_0$, $y_0 \in E(f)$ имеет единственное решение. Например, уравнение $|x| = y_0$, $y_0 \in [c; d]$, $0 < c < d$, имеет два решения: $x_1 = -y_0$ и $x_2 = y_0$. Уравнение $\cos x = y$, $y \in [-1; 1]$ имеет бесконечное множество решений $x = \pm \arccos y + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Определение 3.2. Пусть $Y = f(X)$. Если каждому элементу $y_0 \in Y$ отвечает единственный элемент $x_0 \in X$, такой, что $f(x_0) = y_0$, то функция $y = f(x)$, $x \in X$, называется *обратимой*.

Заметим, что, говоря об обратимости функции f , необходимо указывать множество X , на котором рассматривается эта функция. Например, функция $y = kx + b$, $k \neq 0$, обратима на любом промежутке $X \subset \mathbb{R}$ и, в частности, на всей числовой прямой. Однако функция $y = x^2$, заданная на всей числовой прямой, необратима (каждому значению $y_0 > 0$ отвечают два значения $x \in \mathbb{R}$: $x_1 = -\sqrt{y_0}$ и $x_2 = \sqrt{y_0}$).

На рис. 3.2 обозначены:

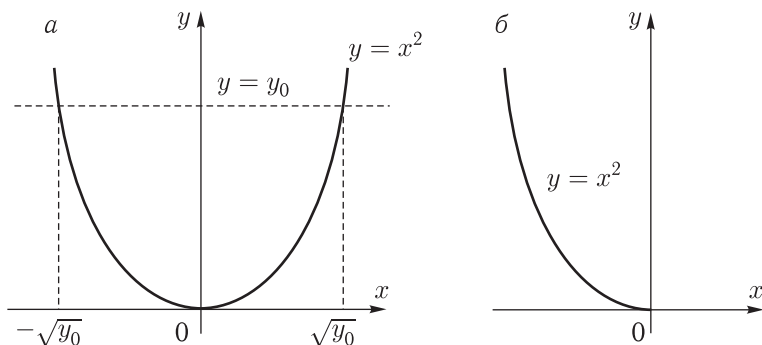


Рис. 3.2

- а) $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, — необратимая функция,
 б) $y = x^2$, $x \in (-\infty; 0]$, — обратимая функция; $x = -\sqrt{y}$,
 $y \in [0; +\infty)$ — обратная к ней.

Функция $y = x^2$, заданная на множестве $X_1 = (-\infty; 0]$ или на множестве $X_2 = [0; +\infty)$, либо на любом непустом подмножестве одного из них, обратима.

Можно указать простой критерий проверки функции на обратимость: если любая прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку $(0, y)$, где y — элемент множества $Y = f(X)$ значений функции, пересекает график этой функции ровно в одной точке, то функция $y = f(x)$, $x \in X$, обратима. Отметим, что четные функции необратимы.

Определение 3.3. Функция $x = g(y)$, определенная на множестве $Y = f(X)$ значений обратимой функции $y = f(x)$, $x \in X$, и отображающая каждый элемент (число) $y_0 \in Y$ в такой элемент $x_0 \in X$, что $f(x_0) = y_0$, называется *обратной* к функции $y = f(x)$, $x \in X$.

Таким образом, если $y = f(x)$, $x \in X$, отображает элемент x_0 множества X в некоторый элемент y_0 множества Y , то обратная функция $x = g(y)$, $y \in Y$, отображает этот элемент $y_0 \in Y$ в элемент $x_0 \in X$, образом которого он является. Иначе говоря, если $y_0 = f(x_0)$, то $g(y_0) = x_0$ (рис. 3.3), или

$$f(g(y_0)) = y_0 \quad \text{и} \quad g(f(x_0)) = x_0.$$

В этом смысле функции

$$y = f(x), \quad x \in X \quad \text{и} \quad x = g(y), \quad y \in Y,$$

являются взаимно обратными (рис. 3.3). Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$, $x \in X$, и $x = g(y)$, $y \in Y$, совпадают. Обратную функцию $g(y)$ обозначают также $f^{-1}(y)$. Такое обозначение представляется более удобным.

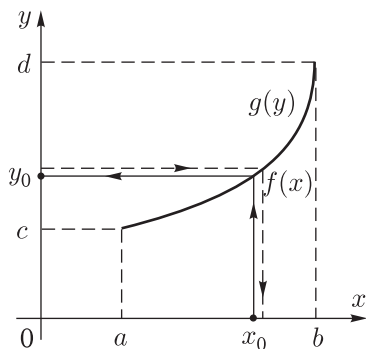


Рис. 3.3

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.1. Если функция f строго возрастает (убывает) на множестве X и $Y = f(X)$ — множество ее значений, то на множестве Y определена строго возрастающая (убывающая) обратная функция f^{-1} .

Теорема 3.2. Если функция f определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на промежутке $X \subset \mathbb{R}$ (конечном или бесконечном), тогда на промежутке $Y = f(X)$ определена строго возрастающая (убывающая) и непрерывная функция f^{-1} .

Как уже отмечалось выше, для нахождения обратной функции $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$, к заданной функции $y = f(x)$, $x \in X$, необходимо решить относительно переменной x уравнение $f(x) = y$, $y \in Y = f(X)$.

Пример 3.1. Найдите функцию, обратную к заданной

$$y = 2x + 2, \quad x \in [1; 3].$$

Решение. Заданная функция является строго возрастающей и непрерывной на отрезке $[1; 3]$. В соответствии с теоремой 3.2 на отрезке $[4; 8]$, являющемся образом отрезка $[1; 3]$, определена обратная функция, которая также будет непрерывной и строго возрастающей.

Решив уравнение $2x + 2 = y$, получим аналитическое выражение для обратной функции $f^{-1}(y)$: $x = \frac{1}{2}y - 1$, $y \in [4; 8]$. Обратная функция отображает отрезок $[4; 8]$ на отрезок $[1; 3]$, т. е. $f^{-1}([4; 8]) = [1; 3]$.

Ответ: $x = \frac{1}{2}y - 1$, $y \in [4; 8]$.

Замечание. Обратную функцию $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$, часто записывают в другой, более привычной форме: $y = f^{-1}(x)$, $x \in Y$. Эта форма отличается от первой ($x = f^{-1}(y)$) заменой переменных x на y и y на x . Отметим, что закон f^{-1} обратного отображения при этом, естественно, сохраняется. Взаимная замена переменных приводит к тому, что точка $M_0(x_0, y_0)$ графика функции $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$ (или графика функции $y = f(x)$, $x \in X$), отображается в точку $M_1(y_0, x_0)$ графика обратной функции $y = f^{-1}(x)$, $x \in Y$, симметричную точке M_0 относительно прямой $y = x$ (пример 3.2, рис. 3.4).

Замена одной формы записи обратной функции на другую равносильна выполнению преобразования $y = x$, при котором отображаются симметрично относительно прямой $y = x$:

- а) множество Y с оси Oy на ось Ox ;
- б) множество X с оси Ox на ось Oy ;
- в) график обратной функции $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$.

Именно в этой второй форме $y = f^{-1}(x)$, $x \in Y$, мы и будем далее рассматривать обратные функции.

Заметим, что если $D(f)$ — область определения (задания) функции f , $E(f)$ — область ее значений, то обратная функция $y = f^{-1}(x)$ будет определена на множестве $E(f)$, а ее значения образуют множество $D(f)$, т. е. $D(f^{-1}) = E(f)$; $E(f^{-1}) = D(f)$ (в смысле равенства числовых множеств).

Пример 3.2. Найдите функцию $y = f^{-1}(x)$, обратную к заданной $y = 2x + 2$, $x \in [1; 3]$.

Решение. Используя результаты предыдущего примера и сделанное замечание, получаем, что обратной будет функция

$$y = \frac{1}{2}x - 1, \quad x \in [4; 8].$$

На рис. 3.4 изображены графики заданной функции

$$y = 2x + 2, \quad x \in [1; 3],$$

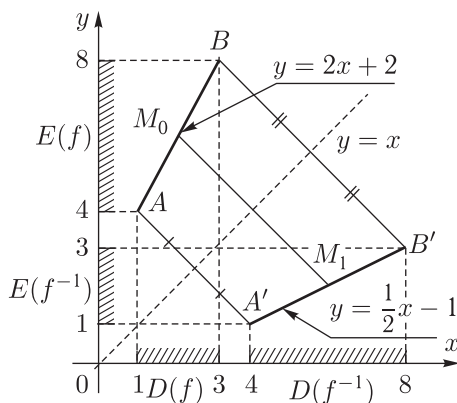


Рис. 3.4

и обратной

$$y = \frac{1}{2}x - 1, \quad x \in [4; 8].$$

В данном случае

$$D(f^{-1}) = E(f) = [4; 8]; \quad E(f^{-1}) = D(f) = [1; 3].$$

Ответ: $y = \frac{1}{2}x - 1, \quad x \in [4; 8].$

Пример 3.3. Найдите функцию $y = f^{-1}(x)$, обратную к заданной

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & -2 < x < 0; \\ x^2 + 2, & 0 \leq x < 2; \\ \frac{1}{2}x + 5, & 2 \leq x \leq 5. \end{cases} \quad (3.1)$$

Решение. Функции $y_1(x) = \frac{1}{2}x + 1$ и $y_3(x) = \frac{1}{2}x + 5$ являются монотонно возрастающими на заданных промежутках — интервале $(-2; 0)$ и отрезке $[2; 5]$ соответственно — как линейные функции с угловым коэффициентом $k > 0$ ($k = \frac{1}{2}$). Функция $y_2(x) = x^2 + 2$ также монотонно возрастает на полуинтервале $[0; 2)$.

Поскольку $y_1(0) = 1 \neq y_2(0) = 2$, то функция $y(x)$ терпит в точке $x = 0$ разрыв. В точке $x = 2$ она непрерывна, поскольку $y_2(2) = y_3(2) = 6$.

Таким образом, функция $y(x)$ является монотонно возрастающей на всей области определения (почему?), но не является непрерывной. В соответствии с теоремой 3.1 существует обратная функция f^{-1} с областью определения $D(f^{-1}) = (y_1(-2); y_1(0)) \cup [y_2(0); y_3(5)]$, которая также будет монотонно возрастающей. Вычислив указанные значения, получим, что $D(f^{-1}) = E(f) = (0; 1) \cup [2; 7,5]$.

Найдем обратную функцию:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x + 1 = y &\Leftrightarrow x = 2y - 2, \quad y \in (0; 1); \\ x^2 + 2 = y, \quad 0 \leq x < 2 &\Leftrightarrow x = \sqrt{y - 2}, \quad y \in [2; 6); \\ \frac{1}{2}x + 5 = y &\Leftrightarrow x = 2y - 10, \quad y \in [6; 7,5]. \end{aligned}$$

Обратной к заданной функции (3.1) является функция

$$y(x) = \begin{cases} 2x - 2, & 0 < x < 1; \\ \sqrt{x - 2}, & 2 \leq x < 6; \\ 2x - 10, & 6 \leq x \leq 7,5 \end{cases}$$

(рис. 3.5).

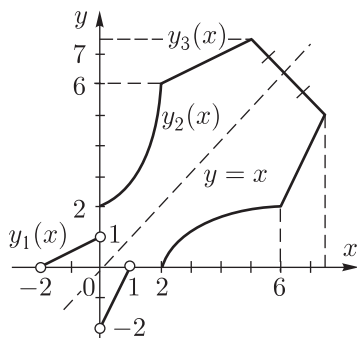


Рис. 3.5

$$\text{Ответ: } y(x) = \begin{cases} 2x - 2, & 0 < x < 1; \\ \sqrt{x - 2}, & 2 \leq x < 6; \\ 2x - 10, & 6 \leq x \leq 7,5. \end{cases}$$

Пример 3.4. Найдите функцию $y = f^{-1}(x)$, обратную к заданной

$$y = x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Решение. Функция $y = x^3$ определена на всей числовой оси, строго возрастает и непрерывна на области определения. В соответствии с теоремой 3.2 существует обратная функция

$$x = \sqrt[3]{y}, \quad y \in \mathbb{R}$$

($y = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$), которая также будет строго возрастающей и непрерывной на всей числовой прямой. На рис. 3.6 изображены графики функций $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$.

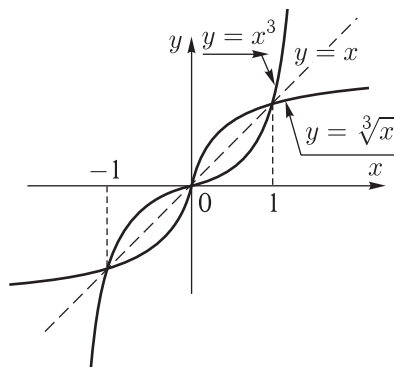


Рис. 3.6

Ответ: $y = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Замечание. В точках $x = -1$, $x = 0$ и $x = 1$ имеют место равенства $x^3 = \sqrt[3]{x} = x$, т. е. числа -1 ; 0 ; 1 являются решениями уравнения $x^3 = \sqrt[3]{x}$. При этом уравнение $x^3 = \sqrt[3]{x}$ равносильно каждому из уравнений $x^3 = x$ и $\sqrt[3]{x} = x$.

Это замечание позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.3. Если в уравнении $f(x) = g(x)$ функции $f(x)$ и $g(x)$ являются взаимно обратными и возрастающими на области X определения уравнения, то уравнение равносильно на X каждому из уравнений $f(x) = x$, $g(x) = x$.

Пример 3.5. Решите уравнение

$$x^3 + 6 = 7\sqrt[3]{7x - 6}.$$

Решение. Функции $f(x) = \frac{x^3 + 6}{7}$ и $g(x) = \sqrt[3]{7x - 6}$ определены, непрерывны и строго возрастают на всей числовой прямой; при этом $E(f) = E(g) = \mathbb{R}$. Поэтому каждая из этих

функций имеет обратную. Решив уравнение $\frac{x^3 + 6}{7} = y$, получим $x = \sqrt[3]{7y - 6}$, или $y = \sqrt[3]{7x - 6}$ после замены y на x . Отсюда следует, что $f^{-1}(x) = g(x)$, т. е. функции f и g являются взаимно обратными.

В соответствии с теоремой 3.3 исходное уравнение равносильно следующему:

$$\frac{x^3 + 6}{7} = x \Leftrightarrow x^3 - 7x + 6 = 0.$$

Решив это уравнение, получим

$$(x^3 - x) - 6(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0, \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 2, \\ x = -3. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$.

Замечание 1. Подчеркнем важность всех условий в теореме 3.3. Во-первых, если функции f и g в уравнении $f(x) = g(x)$ являются взаимно обратными и *строго убывающими* на области определения уравнения, то это уравнение уже не равносильно уравнениям $f(x) = x$ и $g(x) = x$. Однако одну общую точку графики функций $f(x)$, $g(x)$ и $y = x$ могут иметь и в этом случае.

Например, уравнение

$$1 - x^3 = \sqrt[3]{1 - x}$$

определено на всей числовой прямой, функции $f(x) = 1 - x^3$ и $g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$ являются взаимно обратными и *строго убывающими* на области определения уравнения. Поэтому нельзя утверждать, что исходное уравнение равносильно, например, уравнению

$$1 - x^3 = x.$$

Последнее уравнение имеет единственный корень

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{31}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{31}{108}}},$$

который является одновременно корнем исходного уравнения.

Однако исходное уравнение имеет еще четыре корня: $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ и два корня x_4 и x_5 , являющиеся решениями уравнения

$$x^4 + x^3 - 2x - 1 = 0.$$

Действительно, обозначив $\sqrt[3]{1-x} = t$, или $x = 1 - t^3$, получим систему

$$\begin{cases} 1 - x = t^3, \\ 1 - t = x^3. \end{cases}$$

После вычитания первого уравнения из второго получим

$$x - t = x^3 - t^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - t = 0, \\ x^2 + xt + t^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение совокупности приводит, с учетом введенного обозначения ($t = 1 - x^3$) к уравнению $x^3 + x - 1 = 0$, которое имеет единственный корень x_1 .

Второе уравнение совокупности при $t = 1 - x^3$ принимает следующий вид:

$$x(x^5 - x^3 - 2x^2 + x + 1) = 0.$$

Отсюда заключаем, что $x_2 = 0$ и $x_3 = 1$ являются корнями данного и исходного уравнения. После деления многочлена $x^5 - x^3 - 2x^2 + x + 1$ на двучлен $x - 1$ получим уравнение

$$x^4 + x^3 - 2x - 1 = 0.$$

Исследование показывает, что это уравнение, а значит, и исходное уравнение, имеет еще два корня x_4 и x_5 .

Замечание 2 к теореме 3.3 касается области X допустимых значений уравнения $f(x) = g(x)$ и множества X_1 , на котором функции f и g являются взаимно обратными. Если $X_1 = X$ и функции f и g являются строго возрастающими, то «работает» теорема 3.3. Если же X_1 является собственным подмножеством множества X , то уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно каждому из уравнений $f(x) = x$ и $g(x) = x$ только на множестве X_1 . Рассмотрим следующий пример.

Пример 3.6. Решите уравнение

$$(x - 1)^2 = 1 + \sqrt{x}.$$

Решение. Уравнение определено на полуинтервале $X = [0; +\infty)$. На промежутке $X_1 = [1; +\infty)$ ($X_1 \subset X$) функции

$f(x) = (x - 1)^2$ и $g(x) = 1 + \sqrt{x}$ являются взаимно обратными и строго возрастающими. Поэтому в соответствии с замечанием 2 к теореме 3.3 исходное уравнение равносильно уравнению

$$(x - 1)^2 = x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

только на множестве $X_1 = [1; +\infty)$. На этом промежутке последнее уравнение имеет единственный корень $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

На полуинтервале $[0; 1)$ функция $f(x) = (x - 1)^2$ является убывающей, а функция $g(x) = 1 + \sqrt{x}$ — возрастающей, и при этом $E(f) \cap E(g) = [1; \infty)$. Поэтому если исходное уравнение имеет на промежутке $[0; 1)$ решение, то оно единственное. Нетрудно видеть, что $x = 0$ является его решением (рис. 3.7).

Ответ: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

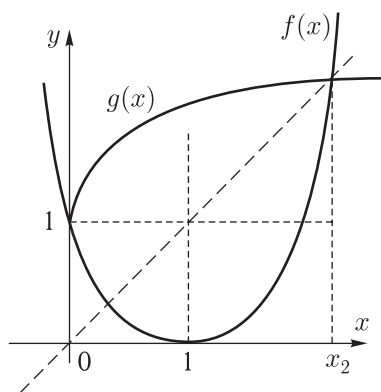


Рис. 3.7

Пример 3.7. Найдите функцию $y = f^{-1}(x)$, обратную к заданной

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad x \in (-\infty, 0].$$

Решение. Выясним, является ли заданная функция обратимой на указанном множестве. Найдем $y'(x) = ((x^2 + 1)^{-1})' = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$. Поскольку $y'(x) \geq 0$ на $(-\infty, 0]$, то функция $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ строго возрастает (почему?) на этом промежутке и является непрерывной функцией на нем. Множество значений $E(y) = (0, 1]$. Действительно, $\frac{1}{x^2 + 1} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$; $y(0) = 1$. Поэтому с учетом непрерывности и монотонного возрастания функции $y(x)$ заключаем, что $E(y) = (0, 1]$.

Тогда в соответствии с теоремой 3.2 существует обратная функция $f^{-1}(x)$, которая определена, непрерывна и строго возрастает на полуинтервале $(0, 1]$, а множество принимаемых ею значений составляет бесконечный промежуток $E(f^{-1}) =$

$= (-\infty, 0]$. Отметим, что на всей числовой прямой функция $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ необратима (почему?).

Решив уравнение $\frac{1}{x^2 + 1} = y$, получим $x = \pm \sqrt{\frac{1-y}{y}}$. Из двух возможных выражений для обратной функции выбираем $x = -\sqrt{\frac{1-y}{y}}$, поскольку $x(y) < 0$ ($x(y) \in (-\infty, 0]$). На рис. 3.8 приведены графики заданной $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, $x \in (-\infty, 0]$, и обратной $y = -\sqrt{\frac{1-x}{x}}$, $x \in (0; 1]$, функций.

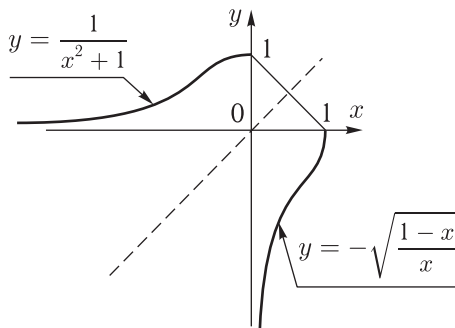


Рис. 3.8

Ответ: $y = -\sqrt{\frac{1-x}{x}}$, $x \in (0; 1]$.

Пример 3.8. Решите уравнение

$$2f^{-1}(6\cos^2 x + 7\sin x) = \sin x + 5,$$

если известно, что $f(3x + 2) = 6x + 5$.

Решение. Для решения данного примера необходимо:

- 1) построить отображение $f(x)$;
- 2) найти обратную функцию $f^{-1}(x)$;
- 3) составить и решить искомое уравнение.

Отображение $f(x)$ нужно получить из условия $f(3x + 2) = 6x + 5$. Это можно сделать с помощью явной замены переменной:

$$t = 3x + 2, \quad x = \frac{1}{3}(t - 2) \Rightarrow f(t) = 6\frac{t-2}{3} + 5 \Leftrightarrow f(x) = 2x + 1.$$

Другой способ — неявная замена переменной:

$$f(3x + 2) = 6x + 5 \Leftrightarrow f(3x + 2) = 2(3x + 2) + 1,$$

или $f(t) = 2t + 1$, где $t = 3x + 2$.

Для нахождения функции $f^{-1}(x)$, обратной к $f(x) = 2x + 1$, решим уравнение $y = 2x + 1$ относительно переменной x . Получим $x = \frac{y-1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$.

Составим и решим уравнение, которое следует из условия примера:

$$\begin{aligned} 2\frac{1}{2}(6\cos^2 x + 7\sin x - 1) &= \sin x + 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^2 x - \sin x &= 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 3.9. Решите неравенство $g(x) \geq f(x)$, где $g(x)$ — функция, обратная к

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1}.$$

Решение. Функция $f(x) = \frac{(x+1)+1}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$ определена на множестве

$$D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1; \infty),$$

непрерывна и монотонно убывает на каждом из бесконечных промежутков $(-\infty, -1)$ и $(-1; \infty)$ (но не на $D(f)$). Поэтому обратная функция существует (теорема 3.1).

Решив уравнение $\frac{x+2}{x+1} = y$, получим $x = \frac{2-y}{y-1}$, откуда

$$g(x) = \frac{2-x}{x-1},$$

или

$$g(x) = -1 + \frac{1}{x-1}.$$

Эта функция определена на множестве

$$D(g) = E(f) = (-\infty, 1) \cup (1; \infty),$$

непрерывна и монотонно убывает на каждом из бесконечных промежутков $(-\infty, 1)$ и $(1; \infty)$.

Решим неравенство $g(x) \geq f(x)$:

$$\frac{2-x}{x-1} \geq \frac{x+2}{x+1} \Leftrightarrow \frac{-2(x^2-2)}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{(x+1)(x-1)} \leq 0.$$

Решив последнее неравенство методом интервалов (рис. 3.9), получим, что $x \in [-\sqrt{2}; -1) \cup (1, \sqrt{2}]$.

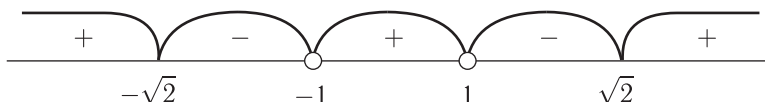


Рис. 3.9

На рис. 3.10 приведена геометрическая иллюстрация данного примера.

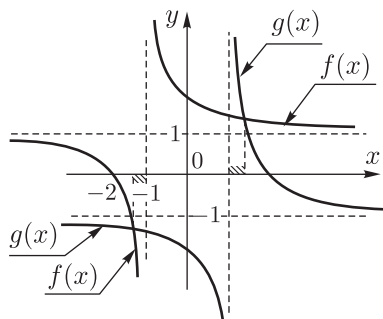


Рис. 3.10

Ответ: $1 < |x| \leq \sqrt{2}$.

3.2. Обратные тригонометрические функции

Функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ являются периодическими, и потому каждое значение y из своей области значений ($y \in [-1; 1]$ для $\sin x$ и $\cos x$; $y \in \mathbb{R}$ для $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$) они принимают бесконечное число раз. Каждая из названных функций имеет бесконечное число периодически повторяющихся промежутков монотонности. Для построения обратной функции необходимо выбрать один из них. Удобно выбирать ближайший к точке $x = 0$ промежуток монотонности тригонометрической функции. Для $\sin x$ это — отрезок $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; для $\cos x$ — отрезок $[0; \pi]$; для $\operatorname{tg} x$ — интервал $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$; для $\operatorname{ctg} x$ — интервал $(0; \pi)$.

3.2.1. Функции арксинус и арккосинус

На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ непрерывна и строго возрастает. В соответствии с теоремой 3.2 существует обратная функция $f^{-1}(x)$, $x \in [-1; 1]$, которая также будет непрерывной и строго возрастающей. Обозначают эту функцию $\arcsin x$ (читается: «арксинус икс»), что «переводится» как «угол, синус которого равен x » (arc — угол, sin — синус).

Таким образом, *арксинусом* числа $x \in [-1; 1]$ называется такой угол α , принадлежащий отрезку $[-\pi/2; \pi/2]$, что $\sin \alpha = x$.

В соответствии с определением обратной функции ($f(f^{-1}(y)) = y$; $f^{-1}(f(x)) = x$) имеем тождества:

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad x \in [-1; 1], \quad (3.2)$$

$$\arcsin(\sin \alpha) = \alpha, \quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \quad (3.3)$$

Заметим, что как выражение $\sin(\arcsin x)$, так и тождество (3.2) имеют смысл только для $x \in [-1; 1]$, тогда как выражение $\arcsin(\sin \alpha)$ имеет смысл для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, но тождество (3.3) верно только для $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Свойства функции $y = \arcsin x$

1. Область определения: $D(y) = [-1; 1]$.

2. Область значений:

$$E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \text{ для всех } x \in [-1; 1]\right).$$

3. Четность/нечетность: $\arcsin x$ — нечетная функция. Для любого $x \in [-1; 1]$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

4. Периодичность: непериодическая, так как каждое свое значение она принимает один раз.

5. Интервалы монотонности: строго возрастает на всей области определения.

6. Экстремальные значения: локальных экстремумов нет.

Наименьшее значение на отрезке $[-1; 1]$:

$$\min_{x \in [-1; 1]} (\arcsin x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Наибольшее:

$$\max_{x \in [-1; 1]} (\arcsin x) = \frac{\pi}{2}.$$

График функции $y = \arcsin x$, $x \in [-1; 1]$, приведен на рис. 3.11 и 3.12 вместе с графиком функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, из которого он получается отображением относительно прямой $y = x$.

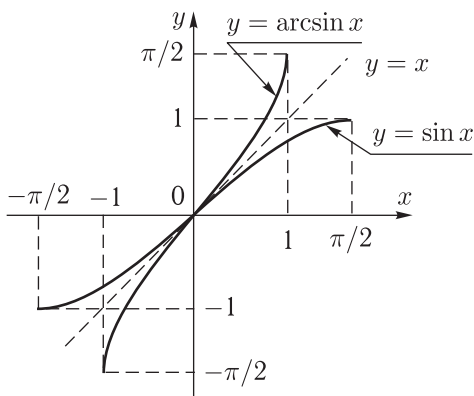
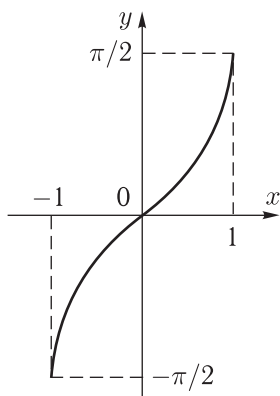


Рис. 3.11. График функции $y = \arcsin x$ Рис. 3.12. Графики функций $y = \sin x$ и $y = \arcsin x$

Функция $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ непрерывна и строго убывает. В соответствии с теоремой 3.2 существует обратная функция $f^{-1}(x)$, $x \in [-1; 1]$, которая также будет непрерывной и строго убывающей. Обозначают ее $\arccos x$ (арккосинус), т. е. *арккосинусом* числа $x \in [-1; 1]$ называется такой угол α , принадлежащий отрезку $[0; \pi]$, что $\cos \alpha = x$:

$$\cos(\arccos x) = x, \quad x \in [-1; 1]. \quad (3.4)$$

Имеет место также тождество

$$\arccos(\cos \alpha) = \alpha, \quad \alpha \in [0; \pi]. \quad (3.5)$$

Выражение $\arccos(\cos \alpha)$ определено для всех $\alpha \in \mathbb{R}$, но тождество (3.5) верно только для $\alpha \in [0; \pi]$.

Свойства функции $y = \arccos x$

1. Область определения: $D(y) = [-1; 1]$.
2. Область значений:

$$E(y) = [0; \pi] \quad (0 \leq \arccos x \leq \pi \text{ для всех } x \in [-1; 1]).$$

3. Четность/нечетность: $\arccos x$ — ни четная, ни нечетная функция. Для всех $x \in [-1; 1]$ справедливо тождество

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x. \quad (3.6)$$

4. Периодичность: непериодическая функция.

5. Интервалы монотонности: строго убывает на всей области определения.

6. Экстремальные значения: локальных экстремумов нет.

Наименьшее значение на отрезке $[-1; 1]$:

$$\min_{x \in [-1; 1]} (\arccos x) = 0.$$

Наибольшее:

$$\max_{x \in [-1; 1]} (\arccos x) = \pi.$$

График функции $y = \arccos x$, $x \in [-1; 1]$, приведен на рис. 3.13 и 3.14 вместе с графиком «прямой» функции $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$.

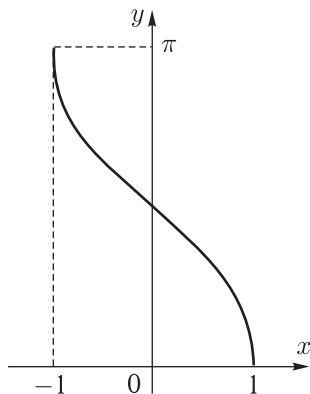


Рис. 3.13. График функции $y = \arccos x$

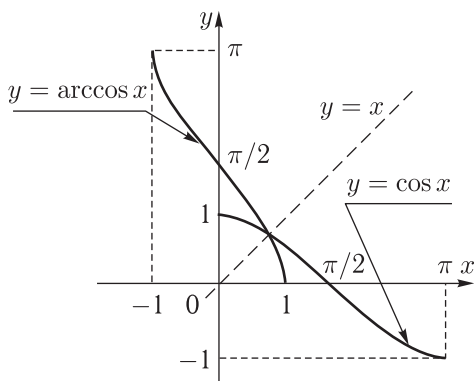


Рис. 3.14. Графики функций $y = \cos x$ и $y = \arccos x$

3.2.2. Функции арктангенс и арккотангенс

На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна и строго возрастает, принимая все значения от $-\infty$ до $+\infty$ ($E(y) = \mathbb{R}$), откуда, с учетом теоремы 3.2, следует, что существует обратная к $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, функция $f^{-1}(x)$, определенная на всей числовой прямой, непрерывная и строго возрастающая. Обозначают ее $\operatorname{arctg} x$ (арктангенс), т. е. *арктангенсом* числа $x \in \mathbb{R}$

называется такой угол α , принадлежащий интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, что $\operatorname{tg} \alpha = x$:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.7)$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha, \quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.8)$$

Выражение $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha)$ определено для всех $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, но тождество (3.8) верно только для $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$

1. Область определения: $D(y) = \mathbb{R}$.
2. Область значений: $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ($-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$ для всех $x \in \mathbb{R}$).
3. Четность/нечетность: нечетная функция. Для всех $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x. \quad (3.9)$$

4. Периодичность: неперидическая.
5. Интервалы монотонности: строго возрастает на всей числовой прямой.
6. Экстремальные значения: локальных и глобальных экстремумов нет.

График функции $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$, приведен на рис. 3.15 и 3.16 вместе с «прямой» функцией $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

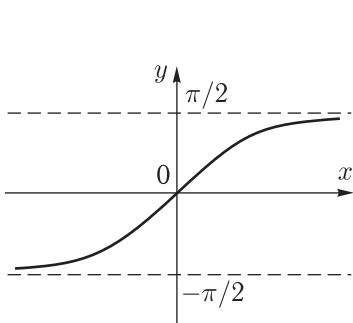


Рис. 3.15. График функции $y = \operatorname{arctg} x$

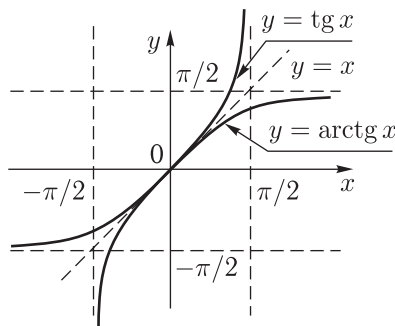


Рис. 3.16. Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{arctg} x$

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ на интервале $(0; \pi)$ непрерывна и строго убывает, принимая значения от $-\infty$ до $+\infty$ ($E(y) = \mathbb{R}$),

откуда, с учетом теоремы 3.2, следует, что существует обратная к $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$, функция $f^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, непрерывная и монотонно убывающая. Обозначают ее $\operatorname{arcctg} x$ (арккотангенс), т.е. *арккотангенсом* числа $x \in \mathbb{R}$ называется такой угол α , принадлежащий интервалу $(0; \pi)$, что $\operatorname{ctg} \alpha = x$:

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.10)$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \alpha, \quad \alpha \in (0; \pi). \quad (3.11)$$

Выражение $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} \alpha)$ определено для всех $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, но тождество (3.11) справедливо только для $\alpha \in (0; \pi)$.

Свойства функции $y = \operatorname{arcctg} x$

1. Область определения: $D(y) = \mathbb{R}$.
2. Область значений: $E(y) = (0; \pi)$ ($0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$ для всех $x \in \mathbb{R}$).
3. Четность/нечетность: ни четная, ни нечетная. Для всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо тождество

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

4. Периодичность: неперiodическая.
5. Интервалы монотонности: строго убывает на всей числовой прямой.
6. Экстремальные значения: локальных и глобальных экстремумов нет.

График функции $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$, приведен на рис. 3.17 и 3.18 вместе с функцией $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$.

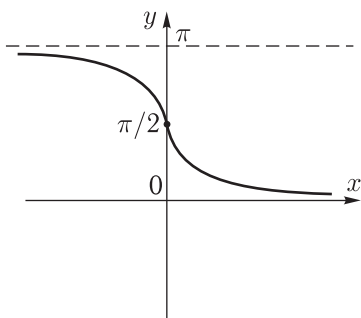


Рис. 3.17. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$

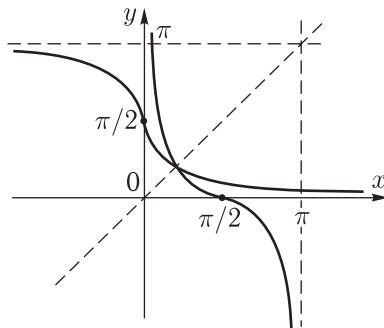


Рис. 3.18. Графики функций $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$

3.2.3. Свойства обратных тригонометрических функций**Тождества группы А.**

$$1. \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1; 1], \quad (3.12)$$

$$2. \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.13)$$

Тождества группы В.

$$3. \quad \arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad x \in [-1; 1].$$

$$4. \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad x \in [-1; 1].$$

$$5. \quad \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$6. \quad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тождества группы С.

$$7. \quad \arcsin(\sin \alpha) = \alpha, \text{ если } \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$8. \quad \arccos(\cos \alpha) = \alpha, \text{ если } \alpha \in [0; \pi].$$

$$9. \quad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha, \quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$10. \quad \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \alpha, \quad \alpha \in (0; \pi).$$

Тождества группы D.

$$11. \quad \sin(\arcsin x) = x, \quad x \in [-1; 1].$$

$$12. \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1; 1].$$

$$13. \quad \operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1; 1).$$

$$14. \quad \operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad x \in [-1; 0) \cup (0; 1].$$

$$15. \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1; 1].$$

$$16. \quad \cos(\arccos x) = x, \quad x \in [-1; 1].$$

$$17. \quad \operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad x \in [-1; 0) \cup (0; 1].$$

$$18. \quad \operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1; 1).$$

$$19. \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$20. \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

$$21. \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

$$22. \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

$$23. \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = x, x \in \mathbb{R}.$$

$$24. \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, x \neq 0.$$

$$25. \sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

$$26. \cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

Приведенные свойства (тождества) либо следуют непосредственно из определения обратных тригонометрических функций, как, например, $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, $\sin(\arcsin x) = x$ и т. п., либо выводятся из соотношений между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

Например:

$$13. \operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)}; \text{ поскольку } \sin(\arcsin x) = x, \\ \text{а } \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \text{ (свойство 12), то } \operatorname{tg}(\arcsin x) = \\ = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ для всех } x \in (-1; 1);$$

22. $\cos(\operatorname{arctg} x)$ можно вычислить, если воспользоваться тождеством

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} : \\ \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \text{ для всех } x \in \mathbb{R}.$$

(в общем случае $\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$; однако здесь $\operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а при $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ $\cos \alpha > 0$ и потому из двух возможных знаков выбираем «+»).

Запомнить все приведенные формулы сложно, поэтому важно уметь их выводить. Вычислительные задачи с обратными тригонометрическими функциями основываются на этих формулах.

3.2.4. Вычислительные задачи с обратными тригонометрическими функциями

Пример 3.9. Вычислите $\sin\left(2 \arccos \frac{1}{3}\right)$.

Решение. Воспользовавшись формулой синуса двойного аргумента и свойствами 15 и 16 (п. 3.2.3), получим

$$\begin{aligned}\sin\left(2 \arccos \frac{1}{3}\right) &= 2 \sin\left(\arccos \frac{1}{3}\right) \cos\left(\arccos \frac{1}{3}\right) = \\ &= 2\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}.\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

Пример 3.10. Вычислите $A = \cos\left(\arcsin \frac{2}{5} - \arctg \frac{1}{2}\right)$.

Решение. По формуле косинуса разности аргументов имеем

$$\begin{aligned}A &= \cos\left(\arcsin \frac{2}{5} - \arctg \frac{1}{2}\right) = \\ &= \cos\left(\arcsin \frac{2}{5}\right) \cos\left(\arctg \frac{1}{2}\right) + \sin\left(\arcsin \frac{2}{5}\right) \sin\left(\arctg \frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Полученные выражения вычислим с использованием свойств 12, 22, 11 и 21 соответственно:

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{1 - \frac{4}{25}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1/2}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \\ &= \frac{2\sqrt{5}(\sqrt{21} + 1)}{25} = \frac{2(\sqrt{105} + \sqrt{5})}{25}.\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2(\sqrt{105} + \sqrt{5})}{25}$.

Пример 3.11. Вычислите $\tg\left(\arcsin \frac{3}{5} + \operatorname{arctg} 4\right)$.

Решение. Поскольку $\tg(\alpha + \beta) = \frac{\tg \alpha + \tg \beta}{1 - \tg \alpha \cdot \tg \beta}$, то

$$\tg\left(\arcsin \frac{3}{5} + \operatorname{arctg} 4\right) = \frac{\tg\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) + \tg(\operatorname{arctg} 4)}{1 - \tg\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) \cdot \tg(\operatorname{arctg} 4)}. \quad (3.14)$$

В соответствии со свойством 13 (п. 3.2.3)

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) = \frac{3/5}{\sqrt{1-9/25}} = \frac{3}{4},$$

а

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 4) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 4)} = \frac{1}{4}.$$

Подставив вычисленные числовые значения в (3.14), получим

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{3}{5} + \operatorname{arcctg} 4\right) = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{16}{13}.$$

Ответ: $\frac{16}{13}$.

Пример 3.12. Вычислите $\cos\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right)$.

Решение. Выразим $\cos 2\alpha$ через $\operatorname{tg} \alpha$ по формуле (2.33):

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

В соответствии с этой формулой

$$\cos\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{9}}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{4}{5}.$$

Ответ: $\frac{4}{5}$.

Пример 3.13. Вычислите $\cos\left(2 \arcsin \frac{3}{4}\right)$.

Решение. Здесь удобно воспользоваться формулой $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$, где $\alpha = \arcsin \frac{3}{4}$. Поскольку

$$\sin \alpha = \sin\left(\arcsin \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}, \text{ то } \cos\left(2 \arcsin \frac{3}{4}\right) = 1 - 2 \cdot \frac{9}{16} = -\frac{1}{8}.$$

Ответ: $-\frac{1}{8}$.

Замечание. Поскольку $\frac{\pi}{4} < \arcsin \frac{3}{4} < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} < 2 \arcsin \frac{3}{4} < \pi$ и соответственно $\cos\left(2 \arcsin \frac{3}{4}\right) < 0$.

Следующий класс вычислительных задач с обратными тригонометрическими функциями составляют задачи вида:

вычислить $\arcsin\left(\cos\frac{53}{3}\pi\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{19}{4}\pi\right)$, $\arccos(\cos 15)$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 14)$ и т. п., т. е. задачи вычисления значений обратных тригонометрических функций по значениям тригонометрических функций. Если аргумент x тригонометрических функций кратен числу π , то эти задачи решаются достаточно легко.

Особую сложность, как показывает опыт выпускных и вступительных экзаменов, представляют те задачи данного вида, в которых аргумент x — произвольное действительное число (не кратное числу π). Эти задачи можно решать различными способами. Умение пользоваться каждым из них, с одной стороны, повышает вероятность успешного решения таких задач на экзамене, с другой — позволяет глубже понимать свойства «прямых» и обратных тригонометрических функций.

Пример 3.14. Вычислите $\arcsin\left(\cos\frac{29}{3}\pi\right)$.

Решение. Решение данной задачи и подобных ей основано на замене числа $\cos\frac{29}{3}\pi$ равным ему числом $\sin\alpha$, где $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда в соответствии с тождеством $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$, если $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, будем иметь

$$\arcsin\left(\cos\frac{29}{3}\pi\right) = \arcsin(\sin\alpha) = \alpha.$$

Воспользовавшись формулами приведения, получим

$$\cos\frac{29}{3}\pi = \cos\left(10\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6}.$$

Поскольку $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\alpha = \frac{\pi}{6}$; следовательно,

$$\arcsin\left(\cos\frac{29}{3}\pi\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

Пример 3.15. Вычислите $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{54}{7}\pi\right)$.

Решение. В соответствии с определением функции $\operatorname{arctg} x$ и тождеством (3.8) необходимо найти угол $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, такой, что $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{54}{7}\pi$. Такой угол существует и единствен (почему?).

Преобразуем $\operatorname{tg} \frac{54}{7}\pi$ с помощью формул приведения:

$$\operatorname{tg} \frac{54}{7}\pi = \operatorname{tg} \left(8\pi - \frac{2}{7}\pi \right) = \operatorname{tg} \left(-\frac{2}{7}\pi \right).$$

Угол $-\frac{2}{7}\pi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$. Поэтому

$$\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{54}{7}\pi \right) = \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \left(-\frac{2}{7}\pi \right) \right) = -\frac{2}{7}\pi.$$

Ответ: $-\frac{2}{7}\pi$.

Пример 3.16. Вычислите $\operatorname{arcctg} \left(\operatorname{tg} \frac{63}{5}\pi \right)$.

Решение. Здесь число $\operatorname{tg} \frac{63}{5}\pi$ необходимо заменить равным ему значением $\operatorname{ctg} \alpha$, $\alpha \in (0; \pi)$, чтобы иметь возможность воспользоваться тождеством (3.11): $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \alpha$ при $\alpha \in (0; \pi)$:

$$\operatorname{tg} \frac{63}{5}\pi = \operatorname{tg} \left(12\pi + \frac{3}{5}\pi \right) = \operatorname{tg} \frac{3}{5}\pi = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{5}\pi \right) = \operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{10} \right).$$

Но угол $\left(-\frac{\pi}{10} \right) \notin (0; \pi)$. Продолжим преобразования:

$$\operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{10} \right) = \operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{10} + \pi \right) = \operatorname{ctg} \frac{9}{10}\pi.$$

Угол $\frac{9}{10}\pi \in (0; \pi)$ и потому

$$\operatorname{arcctg} \left(\operatorname{tg} \frac{63}{5}\pi \right) = \operatorname{arcctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{9}{10}\pi \right) = \frac{9}{10}\pi.$$

Ответ: $\frac{9}{10}\pi$.

Пример 3.17. Вычислите $\arccos \left(\sin \frac{88}{3}\pi \right)$.

Решение. Способ 1.

$$\sin \frac{88}{3}\pi = \sin \left(29\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда

$$\arccos \left(\sin \frac{88}{3}\pi \right) = \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi.$$

Для вычисления $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ воспользовались формулой (3.6).

Способ 2. Используя тождество (3.12), получаем

$$\begin{aligned}\arccos\left(\sin\frac{88}{3}\pi\right) &= \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\sin\frac{88}{3}\pi\right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) = \\ &= \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi.\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{5}{6}\pi$.

Рассмотрим теперь методы решения задач того же вида, но с аргументами тригонометрических функций, не кратными иррациональному числу π .

Пример 3.18. Вычислите $\arccos(\cos 13)$.

Решение. *Способ 1.* С учетом определения функции $\arccos x$ ($\arccos x = \alpha$: $\alpha \in [0; \pi]$, $\cos \alpha = x$) решение задачи заключается в поиске угла $\alpha \in [0; \pi]$, такого, что $\cos \alpha = \cos 13$. Решая это уравнение, получаем

$$\begin{aligned}\cos \alpha - \cos 13 = 0 &\Leftrightarrow 2 \sin \frac{\alpha + 13}{2} \sin \frac{13 - \alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha + 13}{2} = \pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{13 - \alpha}{2} = \pi m, & m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\pi n - 13, & n \in \mathbb{Z}, \\ \alpha = 2\pi m + 13, & m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned} \quad \begin{matrix} (3.15) \\ (3.16) \end{matrix}$$

Теперь необходимо подобрать целое число m или n так, чтобы выполнялось одно из неравенств:

$$\begin{aligned}0 &\leq 2\pi n - 13 \leq \pi, \\ 0 &\leq 2\pi m + 13 \leq \pi,\end{aligned}$$

что равносильно неравенствам:

$$\begin{aligned}13 &\leq 2\pi n \leq \pi + 13, \\ -13 &\leq 2\pi m \leq \pi - 13.\end{aligned}$$

Отметим, что только одно из этих двойных неравенств может иметь решение.

Для первого неравенства такое n не существует. Действительно, если $n = 2$, то $4\pi \approx 12,56 < 13$; если $n = 3$, то $6\pi \approx 18,84 > \pi + 13$.

Второе неравенство выполняется при $m = -2$ и, как следствие, искомым углом $\alpha = 13 - 4\pi$ (формула (3.16)).

Способ 2 — графический способ (рис. 3.19).

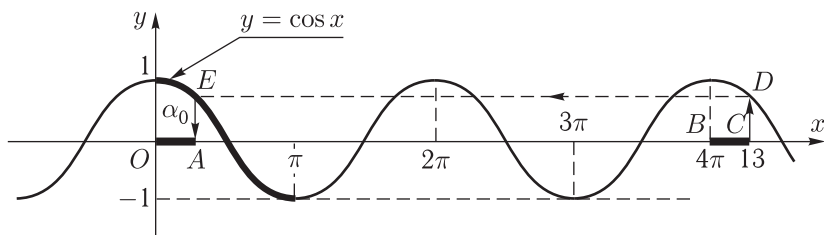


Рис. 3.19

Как уже отмечалось при решении данного примера способом 1, необходимо найти угол $\alpha \in [0; \pi]$, такой, что $\cos \alpha = \cos 13$. Это означает, что необходимо найти на графике функции $y = \cos x$ такую точку $E(\alpha, \cos \alpha)$, $\alpha \in [0; \pi]$, чтобы ее ордината $y_E = \cos \alpha$ была равна ординате $y_D = \cos 13$ точки $D(13, \cos 13)$.

Для реализации графического подхода необходимо:

- построить график функции $y = \cos x$ для промежутка, включающего в себя абсциссу $\alpha = 13$. Целесообразно выделить жирной линией часть графика на отрезке монотонного убывания функции $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$;
- отметить на графике точку $D(13, \cos 13)$, т.е. $x_D = 13$, $y_D = \cos 13$;
- провести через точку D прямую, параллельную оси Ox , до пересечения с графиком функции $y = \cos x$ на отрезке $x \in [0; \pi]$. Такая точка E существует и в силу монотонности функции $y = \cos x$ единственна.
- абсцисса $x_E = \alpha_0$ является искомым значением $\arccos(\cos 13)$.

Из рис. 3.19 и свойства периодичности функции $y = \cos x$ заключаем, что искомый угол $\alpha = |\overline{OA}| = |\overline{BC}| = 13 - 4\pi$.

Ответ: $13 - 4\pi$.

Пример 3.19. Вычислите $\arccos(\cos 11)$.

Решение. Воспользуемся графическим способом решения. При применении этого способа важно определить положение числа x (в данном случае $x = 11$) относительно точек $\frac{\pi n}{2}$. В примечании к примеру 1.5 (п.1.2.1) уже отмечалось, что эти два числа различаются незначительно, поэтому на рис. 3.20 точка $x = 11$ расположена заметно правее точки $x = \frac{7}{2}\pi$ умышленно,

лишь с одной целью — подчеркнуть, что $11 > \frac{7}{2}\pi$. (Подобный прием будет использован и для некоторых других графиков.)

Согласно рис. 3.20 имеем $\alpha = |\overline{OA}| = \frac{\pi}{2} - |\overline{AB}|$. Поскольку $|\overline{AB}| = |\overline{CD}| = 11 - \frac{7}{2}\pi$, то $\alpha = \frac{\pi}{2} - \left(11 - \frac{7}{2}\pi\right) = 4\pi - 11$.

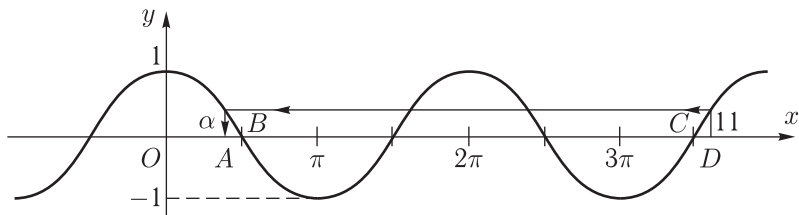


Рис. 3.20

Ответ: $4\pi - 11$.

Решите данный пример способом 1 (см. пример 3.18).

Пример 3.20. Вычислите $\arcsin(\cos 8)$.

Решение. *Способ 1.* Прежде всего необходимо преобразовать $\cos 8$ к $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 8\right)$ или $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 8\right)$, чтобы иметь далее возможность воспользоваться тождеством $\arcsin(\sin \alpha) = \alpha$, если $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Имеем

$$\begin{aligned} \alpha = \arcsin(\cos 8) &= \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - 8\right)\right) = \\ &= \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - 8 + 2\pi n\right)\right). \end{aligned}$$

Подберем n так, чтобы выполнялись неравенства

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - 8 + 2\pi n \leq \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 8 - \pi \leq 2\pi n \leq 8.$$

Подходит $n = 1$. В результате $\alpha = \frac{\pi}{2} - 8 + 2\pi = \frac{5}{2}\pi - 8$.

Способ 2 — графический способ.

Строим график функции $y = \cos x$ и отмечаем на нем точку $(8, \cos 8)$. Здесь же строим график функции $y = \sin x$, но только на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Через точку $(8, \cos 8)$ проводим прямую, параллельную оси Ox , до точки пересечения с графиком функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Такая точка существует и единственна (рис. 3.21).

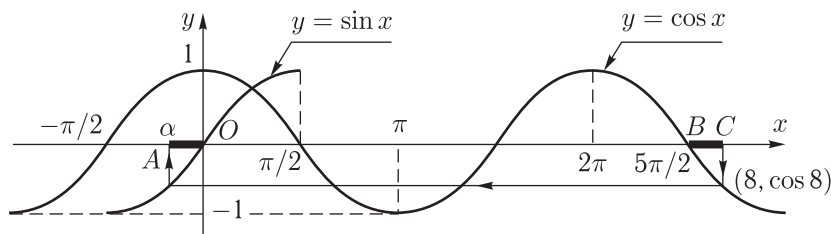


Рис. 3.21

Согласно рис. 3.21 имеем $\alpha = -|\overline{OA}| = -|\overline{BC}| =$
 $= -\left(8 - \frac{5}{2}\pi\right) = \frac{5}{2}\pi - 8.$

Ответ: $\frac{5}{2}\pi - 8.$

Пример 3.21. Вычислите $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 17).$

Решение. *Способ 1.* Необходимо найти угол α , такой, что $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} 17$, откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - 17\right) \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - 17 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

При этом должны выполняться неравенства

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 17 + \pi n < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 17 - \pi < \pi n < 17.$$

Решив это неравенство, найдем, что $n = 5$ и искомый угол

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - 17 + 5\pi = \frac{11}{2}\pi - 17.$$

Способ 2 — графический способ.

В прямоугольной системе координат Oxy строим график функции $y = \operatorname{ctg} x$, $0 < x < 6\pi$, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ ($17 < 6\pi$), и график функции $y = \operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. На графике функции $y = \operatorname{ctg} x$ отмечаем точку $(17, \operatorname{ctg} 17)$ и проводим через нее прямую, параллельную оси Ox , до пересечения с графиком функции $y = \operatorname{tg} x$. Абсцисса точки пересечения и будет искомым значением $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 17)$ (рис. 3.22).

Из рис. 3.22 и свойств функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ получаем, что $\alpha = |\overline{OA}| = |\overline{BC}| = \frac{11}{2}\pi - 17.$

Ответ: $\frac{11}{2}\pi - 17.$

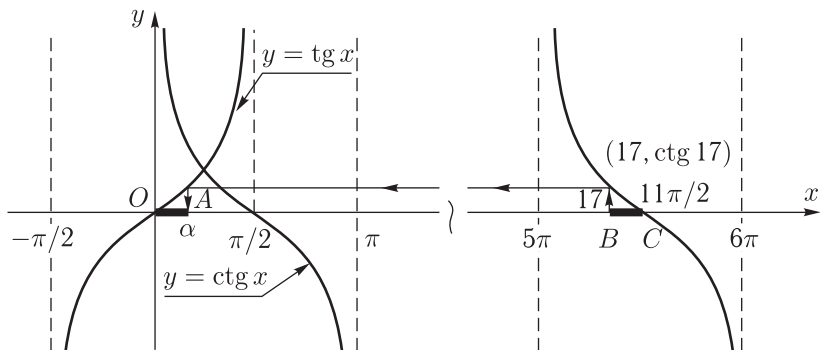


Рис. 3.22

Еще один способ вычисления значений обратных тригонометрических функций по значениям тригонометрических функций для произвольного аргумента последних заключается в использовании графиков функций:

$$\begin{aligned} y &= \arcsin(\sin x), & y &= \arccos(\cos x), & y &= \arcsin(\cos x), \\ y &= \arccos(\sin x), & y &= \arctg(\tg x), & y &= \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x), \\ y &= \operatorname{arctg}(\tg x), & y &= \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x). \end{aligned}$$

Пример 3.22. Постройте график функции $y = \arcsin(\sin x)$ и вычислите:

- а) $\arcsin(\sin 8)$; б) $\arcsin(\sin 10)$; в) $\arcsin\left(\sin \frac{23}{2}\right)$;
г) $\arcsin(\sin 13)$; д) $\arcsin(\sin 17)$.

Решение. Поскольку $\sin x$ — 2π -периодическая функция, то периодической с тем же периодом 2π будет и функция $y = \arcsin(\sin x)$. Поэтому достаточно построить график этой функции на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$ длиной 2π .

На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $\arcsin(\sin x) = x$ и потому $y = x$. Если $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$, то $\sin x = \sin(\pi - x) = |\overline{OA}|$ (рис. 3.23). При этом $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, если $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$. Таким образом,

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x, & \text{если } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \text{если } \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Далее строим периодическое продолжение полученного фрагмента графика — «уголка» ABC — с отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$ на всю числовую прямую (рис. 3.24).

Отрезок CD получается сдвигом отрезка AB на 2π вправо. Поскольку $AB: y = x$, то уравнение прямой $CD: y = x - 2\pi$. Аналогично $EF: y = x - 4\pi$ и т. д.

В итоге можем записать общую формулу для $\arcsin(\sin x)$:

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x - 2\pi n, & \text{если } -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ \pi - x + 2\pi n, & \text{если } \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3}{2}\pi + 2\pi n. \end{cases}$$

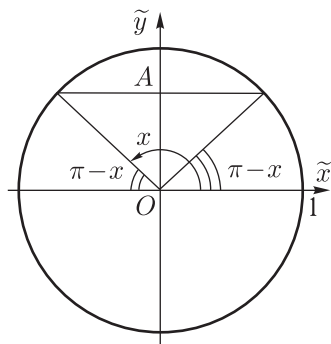


Рис. 3.23

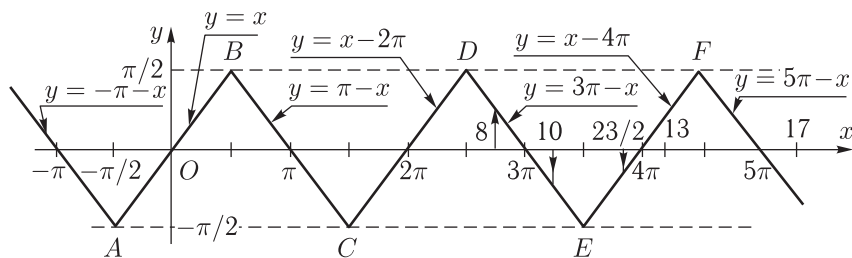


Рис. 3.24

Теперь легко находятся любые значения $\arcsin(\sin x)$. Необходимо лишь правильно определить положение точки x на оси абсцисс и вычислить соответствующее значение $\arcsin(\sin x)$. Имеем:

а) поскольку $\frac{5}{2}\pi < 8 < 3\pi$, то в соответствии с рис. 3.24

$$\arcsin(\sin 8) = (3\pi - x)|_{x=8} = 3\pi - 8;$$

б) $3\pi < 10 < \frac{7}{2}\pi \Rightarrow \arcsin(\sin 10) = (3\pi - x)|_{x=10} = 3\pi - 10;$

в) $\frac{7}{2}\pi < \frac{23}{2} < 4\pi \Rightarrow \arcsin\left(\sin \frac{23}{2}\right) = (x - 4\pi)|_{x=23/2} = \frac{23}{2} - 4\pi;$

г) $4\pi < 13 < \frac{9}{2}\pi \Rightarrow \arcsin(\sin 13) = 13 - 4\pi;$

$$\text{д) } 5\pi < 17 < \frac{11}{2}\pi \Rightarrow \arcsin(\sin 17) = (5\pi - x)|_{x=17} = 5\pi - 17.$$

Ответ: а) $3\pi - 8$; б) $3\pi - 10$; в) $\frac{23}{2} - 4\pi$; г) $13 - 4\pi$;
д) $5\pi - 17$.

Пример 3.23. Постройте график функции $y = \arccos(\cos x)$ и вычислите:

а) $\arccos(\cos 4)$; б) $\arccos\left(\cos \frac{11}{2}\right)$;

в) $\arccos(\cos 7)$; г) $\arccos(\cos 14)$.

Решение. Поскольку функция $y = \cos x$ — 2π -периодическая, то функция $\arccos(\cos x)$ также будет периодической с тем же периодом 2π . Кроме того, функция $y = \arccos(\cos x)$ является четной. Поэтому достаточно построить график функции $y = \arccos(\cos x)$ сначала на $[0; \pi]$, а затем отобразить его симметрично относительно оси Oy . Далее построенный фрагмент графика необходимо продолжить периодически с отрезка $[-\pi; \pi]$ на часть числовой прямой, содержащую заданные аргументы.

На отрезке $[0; \pi]$ имеем $\arccos(\cos x) = x$ (тождество 3.5), и потому $y = x$, если $x \in [0; \pi]$. На промежутке $[-\pi; 0)$ справедливо $y = -x$ (в силу четности функции).

Таким образом,

$$y = \arccos(\cos x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0; \pi], \\ -x, & \text{если } x \in [-\pi; 0). \end{cases}$$

Выполнив периодическое продолжение построенного фрагмента графика — «уголка» AOB , — получим искомый график функции $y = \arccos(\cos x)$ (рис. 3.25).

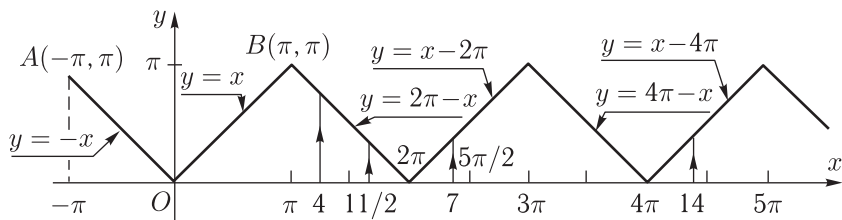


Рис. 3.25

В итоге имеем

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} -x + 2\pi n, & \text{если } -\pi + 2\pi n \leq x \leq 2\pi n, \\ x - 2\pi n, & \text{если } 2\pi n \leq x \leq \pi + 2\pi n. \end{cases}$$

Теперь решим поставленные вычислительные задачи:

- а) $\pi < 4 < 2\pi \Rightarrow \arccos(\cos 4) = (2\pi - x)|_{x=4} = 2\pi - 4$;
 б) $\pi < \frac{11}{2} < 2\pi \Rightarrow \arccos\left(\cos \frac{11}{2}\right) = 2\pi - \frac{11}{2}$;
 в) $2\pi < 7 < 3\pi \Rightarrow \arccos(\cos 7) = 7 - 2\pi$;
 г) $4\pi < 14 < 5\pi \Rightarrow \arccos(\cos 14) = (x - 4\pi)|_{x=14} = 14 - 4\pi$.

Ответ: а) $2\pi - 4$; б) $2\pi - \frac{11}{2}$; в) $7 - 2\pi$; г) $14 - 4\pi$.

Пример 3.24. Постройте график функции $y = \arcsin(\cos x)$ и вычислите:

- а) $\arcsin(\cos 3)$; б) $\arcsin(\cos 4)$;
 в) $\arcsin(\cos 8)$; г) $\arcsin(\cos 14)$.

Решение. Поскольку

$$\arcsin(\cos x) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = -\arcsin\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right),$$

то для построения графика функции $y = \arcsin(\cos x)$ необходимо:

- построить график функции $y = \arcsin(\sin x)$ (рис. 3.23);
- сдвинуть построенный график вдоль оси Ox вправо на $\pi/2$;
- полученный график симметрично отобразить относительно оси Ox .

В результате получим график искомой функции $y = \arcsin(\cos x)$ (рис. 3.26).

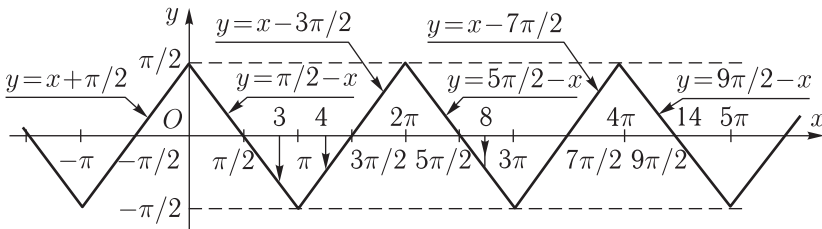


Рис. 3.26

График функции $y = \arcsin(\cos x)$ можно построить иначе на основе тождества

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

В соответствии с этим тождеством для построения графика функции $y = \arcsin(\cos x)$ необходимо:

- построить график функции $y_1 = \arccos(\cos x)$ (рис. 3.25);
- построенный график отобразить симметрично относительно оси Ox ($y_2 = -y_1$);

— полученный на втором шаге график $y_2(x)$ сдвинуть на $\frac{\pi}{2}$ вверх вдоль оси Oy .

В результате будет получен график искомой функции $y = \arcsin(\cos x)$ (рис. 3.26).

Решим поставленные вычислительные задачи:

а) $0 < 3 < \pi \Rightarrow \arcsin(\cos 3) = \frac{\pi}{2} - 3$;

б) $\pi < 4 < 2\pi \Rightarrow \arcsin(\cos 4) = 4 - \frac{3}{2}\pi$;

в) $2\pi < 8 < 3\pi \Rightarrow \arcsin(\cos 8) = \frac{5}{2}\pi - 8$;

г) $4\pi < 14 < 5\pi \Rightarrow \arcsin(\cos 14) = \frac{9}{2}\pi - 14$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} - 3$; б) $4 - \frac{3}{2}\pi$; в) $\frac{5}{2}\pi - 8$; г) $\frac{9}{2}\pi - 14$.

Пример 3.25. Постройте график функции $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ и вычислите:

а) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3)$; б) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 5)$;

в) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 7)$; г) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{21}{2}\right)$.

Решение. Функция $y = \operatorname{tg} x$ является периодической с основным периодом π . Соответственно периодической с основным периодом π будет и функция $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$. Поэтому достаточно построить фрагмент графика на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, где $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ (тождество 3.8), и затем продолжить его периодически (рис. 3.27).

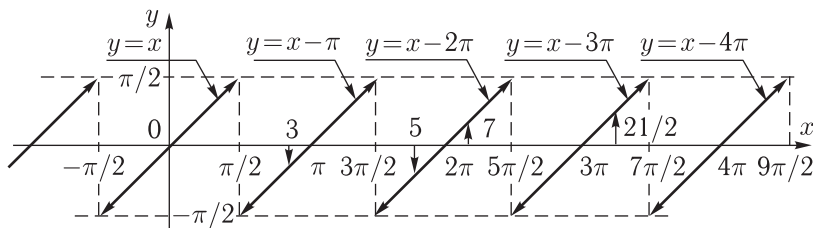


Рис. 3.27

Таким образом, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x - \pi n$, $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$. Решим поставленные вычислительные задачи:

а) $\frac{\pi}{2} < 3 < \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3) = 3 - \pi$;

б) $\frac{3}{2}\pi < 5 < \frac{5}{2}\pi \Rightarrow \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 5) = 5 - 2\pi$;

$$\text{в)} \quad \frac{3}{2}\pi < 7 < \frac{5}{2}\pi \Rightarrow \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 7) = 7 - 2\pi;$$

$$\text{г)} \quad \frac{5}{2}\pi < \frac{21}{2} < \frac{7}{2}\pi \Rightarrow \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{21}{2}\right) = \frac{21}{2} - 3\pi.$$

$$\text{Ответ: а) } 3 - \pi; \text{ б) } 5 - 2\pi; \text{ в) } 7 - 2\pi; \text{ г) } \frac{21}{2} - 3\pi.$$

3.2.5. Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями

Пример 3.26. Решите уравнения:

$$\text{а) } \arcsin x = \frac{\pi}{3}; \text{ б) } \arcsin x = -\frac{\pi}{8};$$

$$\text{в) } \arcsin x = 2; \text{ г) } \arcsin x = 1.$$

Решение. С учетом определения и свойств функции $y = \arcsin x$

$$(D(y) = [-1; 1]; \quad E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \arcsin(-x) = -\arcsin x)$$

имеем:

$$\text{а) } \arcsin x = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{б) } \arcsin x = -\frac{\pi}{8} \Leftrightarrow x = \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\sin \frac{\pi}{8};$$

$$\text{в) } \arcsin x = 2 \Rightarrow x \in \emptyset, \text{ так как } 2 > \frac{\pi}{2};$$

$$\text{г) } \arcsin x = 1 \Leftrightarrow x = \sin 1.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ б) } -\sin \frac{\pi}{8}; \text{ в) } \emptyset; \text{ г) } \sin 1.$$

Пример 3.27. Решите неравенства:

$$\text{а) } \arcsin x < \frac{\pi}{6}; \text{ б) } -\frac{\pi}{3} < \arcsin x < \frac{\pi}{5}; \text{ в) } \begin{cases} \arcsin x < -\frac{\pi}{6}, \\ \arcsin x \geq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Решение. Функция $y = \arcsin x$ является монотонно возрастающей на области определения $D(y) = [-1; 1]$:

$$\text{а) } \arcsin x < \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \sin \frac{\pi}{6}, \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < \frac{1}{2};$$

$$\text{б) } -\frac{\pi}{3} < \arcsin x < \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow -\sin \frac{\pi}{3} < x < \sin \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \sin \frac{\pi}{5};$$

$$\text{в) } \begin{cases} \arcsin x < -\frac{\pi}{6}, \\ \arcsin x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\sin \frac{\pi}{6}, \\ x \geq \sin \frac{\pi}{4}, \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right].$$

Отметим, что здесь имеем дело с совокупностью неравенств, а не с системой. Система данных неравенств, как нетрудно видеть, не имеет решения.

$$\text{Ответ: а) } x \in \left[-1; \frac{1}{2}\right); \text{ б) } x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \sin \frac{\pi}{5}\right); \text{ в) } x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right].$$

Пример 3.28. Решите уравнения:

$$\text{а) } \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{3}; \text{ б) } \operatorname{arctg} x = \frac{2}{3}\pi; \text{ в) } \operatorname{arctg} x = \pi; \text{ г) } \operatorname{arctg} x = 3; \text{ д) } \operatorname{arctg}(-x) = 1.$$

Решение. С учетом определения и свойств функции $y = \operatorname{arctg} x$

$$(D(y) = \mathbb{R}; \quad E(y) = (0; \pi), \quad \operatorname{arctg}(-x) = \pi - \operatorname{arctg} x)$$

имеем:

$$\text{а) } \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\text{б) } \operatorname{arctg} x = \frac{2}{3}\pi \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} \frac{2}{3}\pi = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\text{в) } \operatorname{arctg} x = \pi \Rightarrow x \in \emptyset, \text{ так как } \pi \notin E(y);$$

$$\text{г) } \operatorname{arctg} x = 3 \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} 3;$$

$$\text{д) } \operatorname{arctg}(-x) = 1 \Leftrightarrow \pi - \operatorname{arctg} x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{arctg} x = \pi - 1 \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg}(\pi - 1).$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\sqrt{3}}{3}; \text{ б) } -\frac{\sqrt{3}}{3}; \text{ в) } \emptyset; \text{ г) } \operatorname{ctg} 3; \text{ д) } \operatorname{ctg}(\pi - 1).$$

На рис. 3.28 приведена иллюстрация решения примеров а), б), г).

Пример 3.29. Решите неравенства:

$$\text{а) } \operatorname{arctg} x > \frac{2}{3}\pi; \text{ б) } \frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} x < \frac{3}{4}\pi; \text{ в) } \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{6}.$$

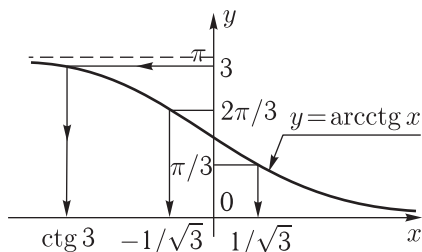


Рис. 3.28

Решение. Функция $y = \text{arcctg } x$ является монотонно убывающей на области определения $D(y) = \mathbb{R}$. Поэтому:

- а) $\text{arcctg } x > \frac{2}{3}\pi \Leftrightarrow x < \text{ctg } \frac{2}{3}\pi \Leftrightarrow x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
 б) $\frac{\pi}{4} < \text{arcctg } x < \frac{3}{4}\pi \Leftrightarrow \text{ctg } \frac{3}{4}\pi < x < \text{ctg } \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -1 < x < 1$;
 в) $\text{arcctg } x < \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x > \text{ctg } \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x > \sqrt{3}$.

Ответ: а) $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $-1 < x < 1$; в) $x > \sqrt{3}$.

Пример 3.30. Решите неравенство $\frac{\pi}{6} < |\text{arctg } x| \leq \frac{\pi}{3}$.

Решение. Для решения данного неравенства целесообразно использовать графический подход. На рис. 3.29 изображены график функции $y = |\text{arctg } x|$ и решение двойного неравенства (заштрихованное множество на оси Ox).

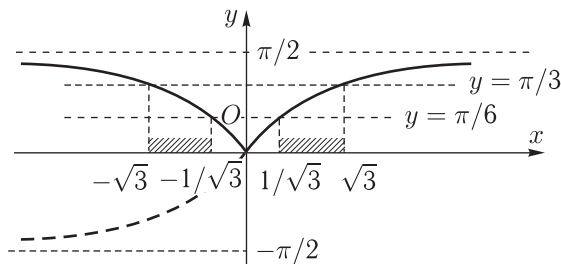


Рис. 3.29

Функция $y = |\text{arctg } x|$ является четной и потому если промежуток $(x_1; x_2]$ есть решение неравенства, то и промежуток $[-x_2; -x_1)$ также будет решением.

Ответ: $x \in \left[-\sqrt{3}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right]$.

Пример 3.31. Решите уравнение

$$2(\arcsin x)^2 - \arcsin x - 1 = 0.$$

Решение. Положим $t = \arcsin x$. В соответствии с определением функции $y = \arcsin x$ множество допустимых значений переменной t — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решив квадратное уравнение $2t^2 - t - 1 = 0$, получим его корни: $t_1 = -\frac{1}{2}$; $t_2 = 1$. Поэтому

$$\begin{aligned}\arcsin x = -\frac{1}{2} &\Leftrightarrow x = \sin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sin\frac{1}{2}; \\ \arcsin x = 1 &\Leftrightarrow x = \sin 1.\end{aligned}$$

Оба корня принадлежат ОДЗ исходного уравнения.

На рис. 3.30 приведена геометрическая иллюстрация решения данного примера.

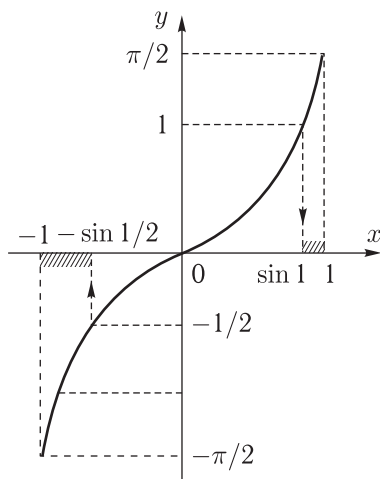


Рис. 3.30

Ответ: $x_1 = -\sin\frac{1}{2}$, $x_2 = \sin 1$.

Пример 3.32. Решите неравенство

$$2 \arcsin^2 x - \arcsin x - 1 > 0.$$

Решение. Используя результаты предыдущего примера, получаем неравенство и его решение:

$$2t^2 - t - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[t < -\frac{1}{2}, \right. \\ \left. t > 1, \right. \\ \left. -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \right. \end{cases}$$

откуда $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(1; \frac{\pi}{2}\right]$, или $x \in \left[-1; -\sin \frac{1}{2}\right) \cup (\sin 1; 1]$.

На рис. 3.30 это множество заштриховано (на оси Ox).

Ответ: $x \in \left[-1; -\sin \frac{1}{2}\right) \cup (\sin 1; 1]$.

Пример 3.33. Решите уравнение

$$\operatorname{arccctg}^2 x - \frac{4}{3}\pi \cdot \operatorname{arccctg} x + \frac{\pi^2}{3} = 0.$$

Решение. Положив $t = \operatorname{arccctg} x$, $0 < t < \pi$, получим квадратное уравнение

$$t^2 - \frac{4}{3}\pi t + \frac{\pi^2}{3} = 0.$$

Его корни: $t_1 = \frac{\pi}{3}$ и $t_2 = \pi$. Подходит $t_1 = \frac{\pi}{3}$; корень $t_2 = \pi$ не удовлетворяет неравенству $0 < t < \pi$. Решаем уравнение

$$\operatorname{arccctg} x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Пример 3.34. Решите неравенство

$$\operatorname{arccctg}^2 x - \frac{4}{3}\pi \operatorname{arccctg} x + \frac{\pi^2}{3} \leq 0.$$

Решение. С учетом результатов предыдущего примера решением неравенства $t^2 - \frac{4}{3}\pi t + \frac{\pi^2}{3} \leq 0$ будет множество

$$\frac{\pi}{3} \leq t < \pi \quad (t = \operatorname{arccctg} x),$$

откуда $x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ (рис. 3.31).

Ответ: $x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

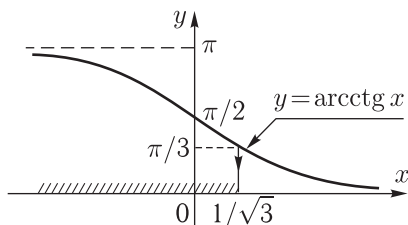


Рис. 3.31

Пример 3.35. Решите уравнения:

а) $\arccos x^2 = \frac{\pi}{3}$; б) $\arccos \sqrt{x} = 2$;

в) $\arccos x^2 = \frac{2}{3}\pi$; г) $\arccos \sqrt{x} = \frac{\pi}{3}$.

Решение.

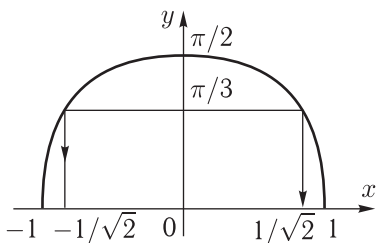
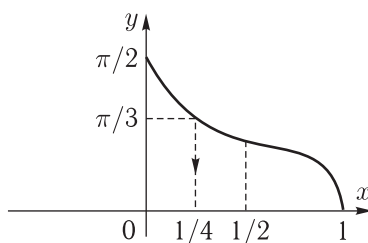
а) $\arccos x^2 = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x^2 = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\arccos \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x \in \emptyset$, так как $\cos 2 < 0$, а $\sqrt{x} \geq 0$ ($\sqrt{x} \in [0, 1]$);

в) $\arccos x^2 = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow x \in \emptyset$, так как $\cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} < 0$, а $x^2 \geq 0$ ($x^2 \in [0, 1]$);

г) $\arccos \sqrt{x} = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

На рис. 3.32 приведен график функции $y = \arccos x^2$, а на рис. 3.33 — график функции $y = \arccos \sqrt{x}$.

Рис. 3.32. График функции $y = \arccos x^2$ Рис. 3.33. График функции $y = \arccos \sqrt{x}$

Ответ: а) $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\emptyset$; в) $\emptyset$; г) $x = \frac{1}{4}$.

Пример 3.36. Решите неравенства:

а) $\arcsin x^2 > \frac{\pi}{6}$; б) $\arcsin x^2 < 2$; в) $\frac{1}{2} \leq \arcsin x^2 < 1$.

Решение. а) Функция $y = \arcsin x^2$ определена на отрезке $[-1; 1]$ и является четной функцией:

$$\arcsin x^2 > \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ -1 \leq x \leq 1, \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right];$$

б) поскольку $E(\arcsin x^2) = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и $2 > \frac{\pi}{2}$, то неравенство $\arcsin x^2 < 2$ справедливо для всех $x \in [-1; 1]$;

$$\text{в) } \frac{1}{2} \leq \arcsin x^2 < 1 \Leftrightarrow \sin \frac{1}{2} \leq x^2 < \sin 1 \Leftrightarrow x \in \left(-\sqrt{\sin 1}; -\sqrt{\sin \frac{1}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\sin \frac{1}{2}}; \sqrt{\sin 1}\right).$$

График функции $y = \arcsin x^2$ изображен на рис. 3.34, а. На рис. 3.34, б приведена иллюстрация решения неравенства $\sin \frac{1}{2} \leq x^2 < \sin 1$.

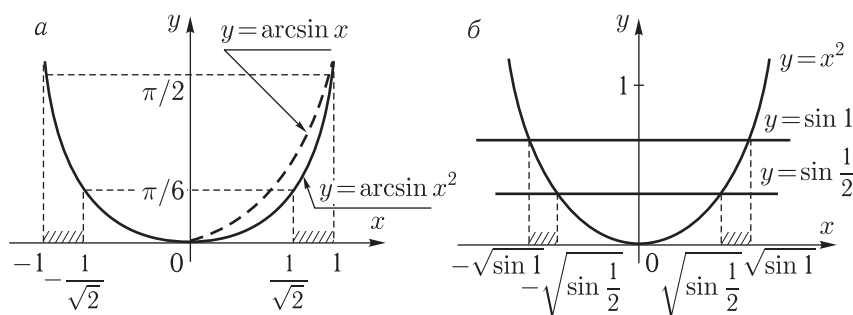


Рис. 3.34

Ответ: а) $x \in \left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$; б) $x \in [-1; 1]$; в) $x \in \left(-\sqrt{\sin 1}; -\sqrt{\sin \frac{1}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\sin \frac{1}{2}}; \sqrt{\sin 1}\right).$

Пример 3.37*. Решите уравнение

$$\arccos(\cos x) = \frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6}.$$

Решение. Способ 1. Из определения функции арккосинус следует, что исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x = \cos \left(\frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6} \right), \\ 0 \leq \frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6} \leq \pi, \end{cases}$$

а она, в свою очередь, системе

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} x &= \frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x &= -\left(\frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6} \right) + 2\pi m, & m \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \right. \\ -\frac{3}{5}\pi \leq x \leq 3\pi. \end{cases}$$

Найдем последовательно решения каждой серии, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3}{5}\pi; 3\pi\right]$.

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{13}{18}x &= \frac{1+12n}{6}\pi \Rightarrow x = \frac{3(1+12n)}{13}\pi, \quad n \in \mathbb{Z}; \\ -\frac{3}{5}\pi &\leq \frac{3(1+12n)}{13}\pi \leq 3\pi \Rightarrow -\frac{3}{10} \leq n \leq 1, \text{ т. е. } n \in \{0; 1\}. \end{aligned}$$

Если $n = 0$, то $x = \frac{3}{13}\pi$; если $n = 1$, то $x = 3\pi$.

$$\begin{aligned} 2) \quad \frac{23}{18}x &= -\frac{\pi}{6} + 2\pi m \Rightarrow x = \frac{3(12m-1)}{23}\pi, \quad m \in \mathbb{Z}; \\ -\frac{3}{5}\pi &\leq \frac{3(12m-1)}{23}\pi \leq 3\pi \Rightarrow -\frac{3}{10} \leq m \leq 2, \text{ т. е. } m \in \{0, 1, 2\}. \end{aligned}$$

Если $m = 0$, то $x = -\frac{3}{23}\pi$; если $m = 1$, то $x = \frac{33}{23}\pi$; если $m = 2$, то $x = 3\pi$.

Объединяя результаты 1) и 2), получаем все решения исходного уравнения:

$$x = -\frac{3}{23}\pi, \quad x = \frac{3}{13}\pi, \quad x = \frac{33}{23}\pi, \quad x = 3\pi.$$

Способ 2. Поскольку (см. пример 3.23)

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} 2k\pi - x, & \text{если } x \in [(2k-1)\pi; 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x - 2k\pi, & \text{если } x \in [2k\pi; (2k+1)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

то решение исходного уравнения равносильно решению совокупности уравнений

$$\begin{cases} 2k\pi - x = \frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6}, & x \in [(2k-1)\pi; 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x - 2k\pi = \frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6}, & x \in [2k\pi; (2k+1)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Эта совокупность имеет бесконечное число уравнений. Однако в данном случае необходимо решить лишь некоторое конечное число уравнений. Это следует из того, что

$$E(\arccos(\cos x)) = [0; \pi], \text{ а } E\left(\frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6}\right) = \mathbb{R}.$$

Для локализации промежутка, которому принадлежат корни исходного уравнения, решим вспомогательные уравнения

$$\frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{5}\pi$$

и

$$\frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6} = \pi \Rightarrow x_2 = 3\pi.$$

Отрезку $\left[-\frac{3}{5}\pi; 3\pi\right]$, на котором расположены все корни исходного уравнения, соответствует конечная совокупность из пяти уравнений

$$\begin{cases} -x = \frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6}, & x \in [-\pi; 0), \\ x = \frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6}, & x \in [0; \pi), \\ 2\pi - x = \frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6}, & x \in [\pi; 2\pi), \\ x - 2\pi = \frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6}, & x \in [2\pi; 3\pi), \\ 4\pi - x = \frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6}; & x \in [3\pi; 4\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{23}\pi, \\ x_2 = \frac{3}{13}\pi, \\ x_3 = \frac{33}{23}\pi, \\ x_4 = 3\pi. \end{cases}$$

На рис. 3.35 приведена графическая иллюстрация. Примеры, аналогичные данному, целесообразно решать с графическим сопровождением. На рис. 3.35 изображены графики функций

$$y_1 = \arccos(\cos x) \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{3}{23}\pi; x = \frac{3}{13}\pi; x = \frac{33}{23}\pi; x = 3\pi.$$

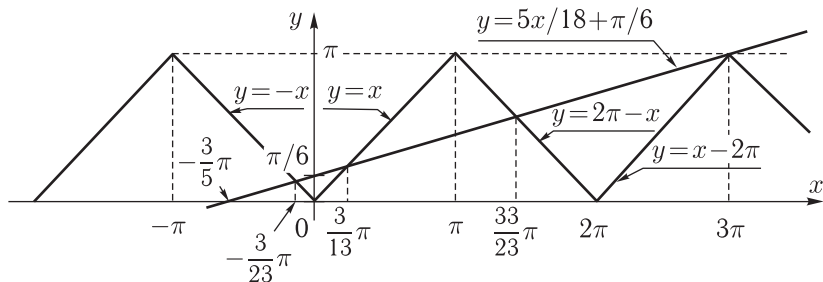


Рис. 3.35

Пример 3.38*. Решите неравенство

$$\arccos(\cos x) \geq \frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6}.$$

Решение. С учетом результатов предыдущего примера получаем решение

$$x \in \left(-\infty; -\frac{3}{23}\pi\right] \cup \left[\frac{3}{13}\pi; \frac{33}{23}\pi\right] \cup \{3\pi\}.$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{23}\pi\right] \cup \left[\frac{3}{13}\pi; \frac{33}{23}\pi\right] \cup \{3\pi\}.$

Пример 3.39*. Решите уравнение

$$\arcsin(\cos x) = x^2 + \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Поскольку $\arcsin(\cos x) \leq \frac{\pi}{2}$ для всех $x \in \mathbb{R}$ (см. рис. 3.25), а $x^2 + \frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{2}$, то уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2}, \\ x^2 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем $x = 0$. Это значение x является решением и первого уравнения:

$$\arcsin(\cos 0) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $x = 0$.

Пример 3.40*. Решите неравенство

$$\frac{\pi}{2} \left(1 - \sin \left(\arcsin \frac{x}{2}\right)\right) \leq \arccos(\cos \pi x).$$

Р е ш е н и е. Перепишем неравенство в равносильной форме

$$1 - \sin\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) \leq \frac{2}{\pi} \arccos(\cos \pi x).$$

В соответствии со свойствами функций $f(f^{-1}(x))$ и $f^{-1}(f(x))$ (см. п. 3.2.1):

- функция $y_1(x) = 1 - \sin\left(\arcsin \frac{x}{2}\right)$ определена на отрезке $[-2; 2]$ ($-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1$), и на этом промежутке

$$y_1(x) = 1 - \frac{x}{2} \quad (\sin\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2});$$

- функция $y_2(x) = \frac{2}{\pi} \arccos(\cos \pi x)$ определена на всей числовой прямой, но при этом только на отрезке $[0, 1]$ $\arccos(\cos \pi x) = \pi x$.

На отрезке $[-2; 2]$, совпадающем с множеством допустимых значений переменной x в исходном неравенстве, имеем (см. пример 3.23)

$$y_2(x) = \frac{2}{\pi} \arccos(\cos \pi x) = \begin{cases} 2(x+2), & -2 \leq x < -1, \\ -2x, & -1 \leq x < 0, \\ 2x, & 0 \leq x < 1, \\ 2(2-x), & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

В результате исходное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\begin{cases} 1 - \frac{x}{2} \leq 2(x+2), & -2 \leq x < -1, \\ 1 - \frac{x}{2} \leq -2x, & -1 \leq x < 0, \\ 1 - \frac{x}{2} < 2x, & 0 \leq x < 1, \\ 1 - \frac{x}{2} \leq 2(2-x), & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Решив эти неравенства, получим, что $x \in \left[-\frac{6}{5}; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{5}; 2\right]$.

Графики функций $y_1(x) = 1 - \sin\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) = 1 - \frac{x}{2}$, $x \in [-2; 2]$

и $y_2(x) = \frac{2}{\pi} \arccos(\cos \pi x)$ приведены на рис. 3.36.

Ответ: $x \in \left[-\frac{6}{5}; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{5}; 2\right]$.

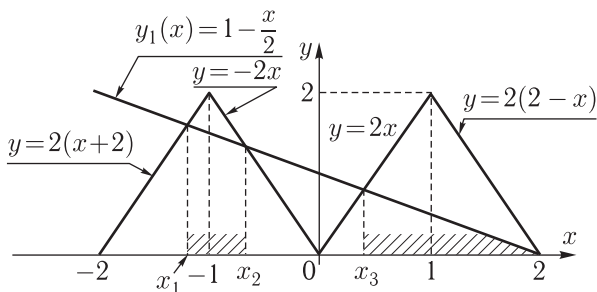


Рис. 3.36

Замечание. Из рисунка видно, что решением исходного неравенства является объединение промежутков $[x_1; x_2] \cup [x_3; 2]$. И потому для решения неравенства достаточно было решить уравнения

$$\begin{cases} 1 - \frac{x}{2} = 2(x+2) \Rightarrow x_1 = -\frac{6}{5}, \\ 1 - \frac{x}{2} = -2x \Rightarrow x_2 = -\frac{2}{3}, \\ 1 - \frac{x}{2} = 2x \Rightarrow x_3 = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Пример 3.41*. Определите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\arcsin(\cos x) = (x - \pi)^2 + a \quad (3.17)$$

имеет два различных решения на отрезке $[0; 2\pi]$, и найдите эти решения.

Решение. График функции $y_1 = \arcsin(\cos x)$ построен в примере 3.24 (рис. 3.26). Графики функций $y_2 = (x - \pi)^2 + a$ представляют собой семейство парабол с вершинами в точках (π, a) . С учетом этого уравнение (3.17) на отрезке $[0; 2\pi]$ равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = (x - \pi)^2 + a & \text{при } 0 \leq x \leq \pi, \\ x - \frac{3}{2}\pi = (x - \pi)^2 + a & \text{при } \pi < x \leq 2\pi. \end{cases} \quad (3.18)$$

При $a = -\frac{\pi}{2}$ [вершина параболы находится в точке $A(\pi, -\frac{\pi}{2})$ (рис. 3.37)] совокупность уравнений (3.18) имеет три решения:

$$x_1 = \pi - 1, \quad x_2 = \pi, \quad x_3 = \pi + 1 \quad (\text{проверьте!}).$$

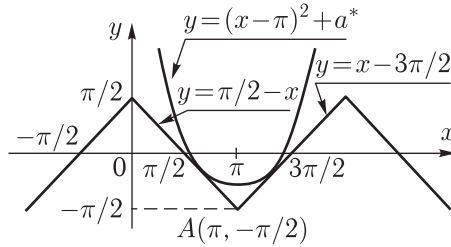


Рис. 3.37

Пусть a_1^* — значение параметра a , при котором парабола проходит через точки $(0, \frac{\pi}{2})$ и $(2\pi, \frac{\pi}{2})$. Тогда при $a_1^* \leq a < -\frac{\pi}{2}$ парабола будет пересекать каждую из прямых $y = \frac{\pi}{2} - x$, $x \in [0; \pi]$, и $y = x - \frac{3}{2}\pi$, $x \in (\pi; 2\pi]$, в одной точке, т. е. совокупность (3.18) будет иметь два различных решения. Значение a_1^* найдем из первого уравнения совокупности (3.18), положив в нем $x = 0$:

$$\frac{\pi}{2} = \pi^2 + a \Rightarrow a_1^* = \frac{\pi}{2} - \pi^2,$$

Таким образом, при $a \in [\frac{\pi}{2} - \pi^2; -\frac{\pi}{2})$ уравнение (3.17) имеет два различных решения. Найдем эти решения.

Из первого уравнения совокупности (3.18) получаем

$$x_1 = \frac{2\pi - 1 - \sqrt{1 - 2\pi - 4a}}{2},$$

а из второго уравнения —

$$x_2 = \frac{2\pi + 1 + \sqrt{1 - 2\pi - 4a}}{2}.$$

Графики функций $y_1(x)$, $x \in [0; 2\pi]$, и $y_2(x)$ будут пересекаться в четырех точках при $-\frac{\pi}{2} < a < a_2^*$, где a_2^* — значение параметра a , при котором парабола $y_2(x)$ касается прямых $y = \frac{\pi}{2} - x$ и $y = x - \frac{3}{2}\pi$. Искомое значение a_2^* параметра a найдем из условия единственности решения какого-либо из уравнений (3.18).

Первое уравнение совокупности

$$\frac{\pi}{2} - x = (x - \pi)^2 + a \Leftrightarrow x^2 - (2\pi - 1)x + \pi^2 - \frac{\pi}{2} + a = 0$$

имеет единственное решение тогда и только тогда, когда его дискриминант $D_x = 0$:

$$(2\pi - 1)^2 - 4\left(\pi^2 - \frac{\pi}{2} + a\right) = 0 \Rightarrow a_2^* = \frac{1 - 2\pi}{4}.$$

При этом $x_1 = \pi - \frac{1}{2}$. Для второго уравнения совокупности аналогично получаем $x_2 = \pi + \frac{1}{2}$.

Ответ:

$$a \in \left[\frac{\pi}{2} - \pi^2; -\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2\pi - 1 - \sqrt{1 - 2\pi - 4a}}{2}, \quad x_2 = \frac{2\pi + 1 + \sqrt{1 - 2\pi - 4a}}{2};$$

$$a = \frac{1 - 2\pi}{4} \Rightarrow x_1 = \pi - \frac{1}{2}, \quad x_2 = \pi + \frac{1}{2}.$$

3.2.6*. Нахождение алгебраических сумм обратных тригонометрических функций

Еще одна группа вычислительных задач с обратными тригонометрическими функциями связана с нахождением алгебраической суммы числовых значений обратных тригонометрических функций. При этом обратные функции в алгебраической сумме могут быть как одноименными, так и разноименными. Для нахождения суммы $f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$ или разности $f^{-1}(x) - f^{-1}(y)$ одноименных обратных функций можно пользоваться тождествами группы F, сводящими сумму (разность) к значению этой же обратной функции от некоторого выражения, т. е. $f^{-1}(\varphi(x, y))$. Например,

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin \left(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} \right),$$

если $xy \leq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 1$.

При нахождении алгебраической суммы разноименных обратных тригонометрических функций полезными оказываются тождества группы E, позволяющие выражать одну обратную тригонометрическую функцию через другие. Например,

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1; 1).$$

Группы E и F тождеств с обратными тригонометрическими функциями приведены ниже в рамках данного пункта.

Пример 3.42. Вычислите $\arctg \frac{1}{7} + \arctg \frac{3}{4}$.

Решение. Обозначим $\alpha = \arctg \frac{1}{7}$, $\beta = \arctg \frac{3}{4}$, $\gamma = \alpha + \beta = \arctg \frac{1}{7} + \arctg \frac{3}{4}$. Функция $y = \arctg x$ определена для каждого значения $x \in \mathbb{R}$ и является монотонно возрастающей. Поэтому из неравенства $0 < \frac{1}{7} < 1$ следует неравенство для значений арктангенса: $0 < \arctg \frac{1}{7} < \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$. Аналогично показывается, что $0 < \arctg \frac{3}{4} < \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$. В результате для угла $\gamma = \alpha + \beta$ справедливо неравенство $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$.

Вычисляем $\tg \gamma = \tg(\alpha + \beta)$. Имеем

$$\tg \gamma = \frac{\tg \left(\arctg \frac{1}{7} \right) + \tg \left(\arctg \frac{3}{4} \right)}{1 - \tg \left(\arctg \frac{1}{7} \right) \tg \left(\arctg \frac{3}{4} \right)} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4}} = 1.$$

Поскольку $\gamma \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$ и функция тангенс является монотонной на этом интервале, то искомое значение $\gamma = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Замечание. Рассуждая аналогично в общем случае: $\gamma = \alpha + \beta = \arctg x + \arctg y$ при условии $xy < 1$, получаем формулу для суммы арктангенсов

$$\arctg x + \arctg y = \arctg \frac{x+y}{1-xy}, \quad xy < 1. \quad (3.19)$$

Пример 3.43. Докажите равенство

$$\arcsin \frac{1}{\sqrt{17}} + \arctg \frac{5}{14} = \arccos \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Решение. Для решения этого примера нам понадобится тождество $\arcsin x = \arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ при $x \in (-1; 1)$. Докажем его. При $x \in (-1; 1)$ функции $\arcsin x$ и $\arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ принимают значения внутри интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$, на котором функции синус и тангенс являются монотонно возрастающими. Найдем

$\operatorname{tg}(\arcsin x)$, $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ и сравним полученные выражения. Имеем

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Отсюда следует, что $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ для каждого значения $x \in (-1; 1)$. ■

В проверяемом равенстве участвуют три разноименные обратные тригонометрические функции. Заменим $\arcsin \frac{1}{\sqrt{17}}$ равным ему значением арктангенса:

$$\arcsin \frac{1}{\sqrt{17}} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{\sqrt{17}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2}}, \quad \text{или} \quad \arcsin \frac{1}{\sqrt{17}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{4}.$$

В итоге доказываемое равенство принимает следующий вид:

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{5}{14} = \arccos \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Обозначим $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{4}$, $\beta = \operatorname{arctg} \frac{5}{14}$ и $\gamma = \alpha + \beta$. Легко показать, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ и при этом $xy = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{14} < 1$.

Поэтому в соответствии с формулой (3.19) имеем

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{5}{14} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{4} + \frac{5}{14}}{1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{14}} = \operatorname{arctg} \frac{2}{3}.$$

Но $\operatorname{arctg} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ при $x > 0$ (проверьте!) и поэтому

$$\gamma = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}} = \arccos \frac{3}{\sqrt{13}}. \quad \blacksquare$$

Приведенные примеры подтверждают необходимость знания или умения выводить формулы, связывающие разноименные об-

ратные тригонометрические функции. Настоятельно рекомендуем доказать самостоятельно следующие тождества.

Тождеств группы Е.

$$27. \arcsin x = \begin{cases} \arccos \sqrt{1-x^2}, & \text{если } [0; 1]; \\ -\arccos \sqrt{1-x^2}, & \text{если } [-1; 0). \end{cases}$$

$$28. \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1; 1).$$

$$29. \arcsin x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & x \in (0; 1]; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & x \in [-1; 0). \end{cases}$$

$$30. \arccos x = \begin{cases} \arcsin \sqrt{1-x^2}, & x \in [0; 1]; \\ \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}, & x \in [-1; 0). \end{cases}$$

$$31. \arccos x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & x \in (0; 1]; \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & x \in [-1; 0). \end{cases}$$

$$32. \arccos x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1; 1).$$

$$33. \operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$34. \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \in [0; +\infty); \\ -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \in (-\infty; 0). \end{cases}$$

$$35. \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x \in (0; +\infty); \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x \in (-\infty; 0). \end{cases}$$

$$36. \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \in [0; +\infty); \\ \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \in (-\infty; 0). \end{cases}$$

$$37. \operatorname{arctg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$38. \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x \in (0; +\infty); \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x \in (-\infty; 0). \end{cases}$$

Докажем в качестве еще одного примера тождества 38. Введем обозначения $\alpha = \operatorname{arccotg} x$, $\beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$. В этих обозначениях доказываемые тождества принимают следующий вид:

$$\alpha = \begin{cases} \beta, & \text{если } x > 0; \\ \pi + \beta, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Обратим внимание на то, что

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\operatorname{arccotg} x) = x, \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right)} = x,$$

и потому $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$ для каждого $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Из последнего равенства $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$ следует, что либо $\alpha = \beta$, либо $|\alpha| + |\beta| = \pi$, т. е. во втором случае точки пересечения радиус-векторов, определяющих эти углы, с единичной окружностью лежат на противоположных концах диаметра (рис. 3.38).

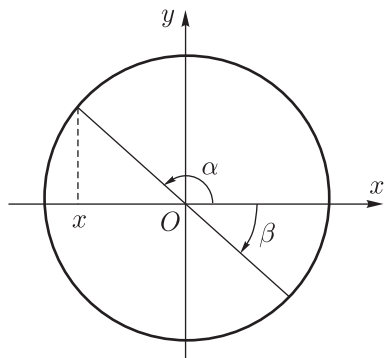


Рис. 3.38

Пусть $x > 0$. Из определения функций арктангенс и арккотангенс и введенных обозначений следует, что $\alpha, \beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Так как $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$ и α, β принадлежат одному интервалу монотонного убывания функции $y = \operatorname{ctg} x$, то $\alpha = \beta$.

Пусть теперь $x < 0$. Из определения функций арктангенс и арккотангенс и введенных обозначений следует, что при этом: $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, а $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Так как $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$, но α и β принадлежат разным интервалам монотонности функции $y = \operatorname{ctg} x$, то $|\alpha| + |\beta| = \pi$. Поскольку $\alpha > 0$, а $\beta < 0$, то $\alpha - \beta = \pi$, откуда $\alpha = \pi + \beta$ (рис. 3.38), или $\operatorname{arccotg} x = \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ при $x < 0$. ■

Тождества группы Е облегчают решение примеров на вычисление алгебраических сумм значений разноименных обратных тригонометрических функций.

Пример 3.44. Вычислите $\operatorname{arccotg} 2\sqrt{2} + \arccos \frac{1}{3}$.

Решение. В соответствии с тождеством 31 ($\arccos x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ при $x \in (0; 1]$) имеем $\arccos \frac{1}{3} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{9}}}{\frac{1}{3}} = \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$.

Но $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$ для каждого $x \in \mathbb{R}$. Поэтому $\operatorname{arccotg} 2\sqrt{2} + \arccos \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

Приведем теперь тождества группы F. Вряд ли необходимо запоминать эти тождества, однако познакомиться с ними и, по возможности, научиться их доказывать целесообразно.

Задачи на применение тождеств группы F редко предлагают на вступительных экзаменах. Однако знание этих тождеств может потребоваться в курсе математического анализа в высшей школе. В любом случае глубокое изучение обратных тригонометрических функций предполагает знакомство с тождествами групп E и F и решение примеров, основанных на этих тождествах.

Тождества группы F.

$$39. \arcsin x + \arcsin y = \begin{cases} \arcsin (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), & \text{если } xy \leq 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leq 1; \\ \pi - \arcsin (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), & \text{если } x > 0, y > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1; \\ -\pi - \arcsin (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), & \text{если } x < 0, y < 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

$$40. \arcsin x - \arcsin y = \begin{cases} \arcsin (x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}), & \text{если } xy \geq 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leq 1; \\ \pi - \arcsin (x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}), & \text{если } x > 0, y < 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1; \\ -\pi - \arcsin (x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}), & \text{если } x < 0, y > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

$$41. \arccos x + \arccos y = \begin{cases} \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), \\ \text{если } x+y \geq 0; \\ 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), \\ \text{если } x+y < 0. \end{cases}$$

$$42. \arccos x - \arccos y = \begin{cases} \arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), \\ \text{если } x < y; \\ -\arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), \\ \text{если } x \geq y. \end{cases}$$

$$43. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, \text{ если } xy < 1; \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, \text{ если } x > 0 \text{ и } xy > 1; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, \text{ если } x < 0 \text{ и } xy > 1. \end{cases}$$

$$44. \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}, \text{ если } xy > -1; \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}, \text{ если } x > 0 \text{ и } xy < -1; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}, \text{ если } x < 0 \text{ и } xy < -1. \end{cases}$$

Докажем в качестве примера три тождества под номером 39. Сначала докажем первое из трех тождеств, а именно:

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right), \quad (3.20)$$

если $xy \leq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 1$.

Обозначим $\alpha = \arcsin x$, $\beta = \arcsin y$, $\gamma = \alpha + \beta$, $\sigma = \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right)$. В соответствии с определением функции арксинус $\alpha, \beta, \sigma \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Очевидно, что γ может принимать значения из отрезка $[-\pi; \pi]$.

Допустимые значения переменных x и y в тождестве (3.20) определяются неравенствами: $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ и $\left| x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right| \leq 1$. Введем в рассмотрение множество $D = \{(x; y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$. Множество D — квадрат со стороной, равной 2 (рис. 3.39).

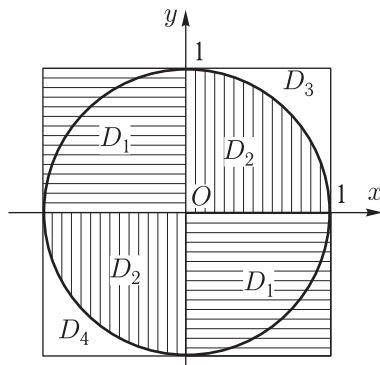


Рис. 3.39

Условию $xy \leq 0$ отвечают вторая и четвертая четверти квадрата (подмножество D_1 , заштрихованное горизонтальными линиями), а условию $x^2 + y^2 \leq 1$ и $xy > 0$ — первая и третья четверти круга $x^2 + y^2 \leq 1$ (подмножество D_2 , заштрихованное вертикальными линиями).

Неравенство $\left| x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right| \leq 1$ выполняется в каждой точке множества D . Действительно, если $xy < 0$, то слагаемые $x\sqrt{1-y^2}$ и $y\sqrt{1-x^2}$ в составе неравенства имеют разные знаки. При этом $\left| x\sqrt{1-y^2} \right| \leq 1$ и $\left| y\sqrt{1-x^2} \right| \leq 1$, поэтому $\left| x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right| \leq 1$.

Пусть теперь $x, y \in [0; 1]$. Тогда доказываемое неравенство принимает вид

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \leq 1, \quad \text{или} \quad x\sqrt{1-y^2} \leq 1 - y\sqrt{1-x^2}.$$

Обе части последнего неравенства неотрицательны. Поэтому на множестве $\{(x; y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ оно равносильно неравенству

$$\left(x\sqrt{1-y^2} \right)^2 \leq \left(1 - y\sqrt{1-x^2} \right)^2 \Leftrightarrow 1 - x^2 - 2y\sqrt{1-x^2} + y^2 \geq 0$$

или $(\sqrt{1-x^2} - y)^2 \geq 0$, а это верное неравенство.

Если $x, y \in [-1; 0]$, то неравенство $\left| x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right| \leq 1$ доказывается аналогично.

Перейдем к доказательству собственно тождества (3.20). Вычислим $\sin \gamma$:

$$\begin{aligned}\sin \gamma &= \sin(\arcsin x + \arcsin y) = \\ &= \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin y) + \cos(\arcsin x) \sin(\arcsin y) = \\ &= x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

Если $0 \leq |\alpha + \beta| \leq \frac{\pi}{2}$, т. е. если $\gamma \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то из равенства $\sin \gamma = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$ следует, что

$$\gamma = \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right). \quad (3.21)$$

Покажем, что при условии $xy \leq 0$, т. е. в области D_1 (рис. 3.39), искомый угол γ может быть найден по формуле (3.21). Поскольку $xy \leq 0$, то либо $\alpha \leq 0$, а $\beta \geq 0$, либо $\alpha \geq 0$, а $\beta \leq 0$. В обоих случаях угол $\gamma = \alpha + \beta$ будет удовлетворять условию $-\frac{\pi}{2} \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ и потому он может быть найден при $xy \leq 0$ по формуле (3.21).

Докажем теперь правомочность вычисления искомого угла γ по формуле (3.21) и в области D_2 . Этим будет завершено доказательство тождества (3.20). Формула (3.21) имеет смысл при выполнении неравенств: $\left| x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right| \leq 1$ и $|\gamma| \leq \frac{\pi}{2}$. Отметим что эти условия не эквивалентны. Например, при $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ имеем: $\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$; $\beta = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ и $\gamma = \alpha + \beta = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7}{12}\pi$, т. е. $\gamma > \frac{\pi}{2}$, хотя неравенство $\left| x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right| \leq 1$, как было доказано выше, выполняется при любых $(x, y) \in D$.

Рассмотрим часть множества D_2 , определяемую условиями $x^2 + y^2 \leq 1$ и $x > 0$, $y > 0$, т. е. множество точек в первой четверти круга радиусом 1 с центром в точке $(0; 0)$. Поскольку функция арксинус является монотонно возрастающей на области определения и при $x > 0$ положительна, то из неравенства $y \leq \sqrt{1-x^2}$, $0 < x \leq 1$, следует, что

$$0 < \arcsin x + \arcsin y \leq \arcsin x + \arcsin \sqrt{1-x^2};$$

поскольку $\arcsin \sqrt{1-x^2} = \arccos x$, то

$$0 < \arcsin x + \arcsin y \leq \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, $0 < \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ в области

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1, x > 0, y > 0\}$$

т. е. и в области D_2 угол γ может быть найден по формуле (3.21) (принадлежность $\gamma \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ при $x < 0, y < 0$ и $x^2 + y^2 \leq 1$ доказывается аналогично).

Тождество (3.20) доказано.

Докажем теперь второе тождество в составе группы тождеств F под номером 39:

$$\begin{aligned} \arcsin x + \arcsin y &= \pi - \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right), \\ &\text{если } x > 0, y > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1. \end{aligned} \quad (3.22)$$

На рис. 3.39 множество точек

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1, x > 0, y > 0\}$$

обозначено D_3 и не заштриховано.

Поскольку $x^2 + y^2 > 1$, то нетрудно доказать, что искомый угол $\gamma > \frac{\pi}{2}$, но при этом угол

$$\sigma = \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right)$$

в соответствии с определением функции арксинус и с учетом условий $x > 0, y > 0$ удовлетворяет неравенству $0 < \sigma < \frac{\pi}{2}$.

Уравнение $\sin \sigma = t$, где $t = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$, имеет два решения: $\sigma = \arcsin t$ и $\gamma = \pi - \sigma$ (рис. 3.40).

Найденный угол γ является искомым углом, т. е. при $(x, y) \in D_3$ справедливо тождество (3.22).

Аналогично доказывается третье тождество

$$\begin{aligned} \arcsin x + \arcsin y &= -\pi - \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right), \\ &\text{если } x < 0, y < 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

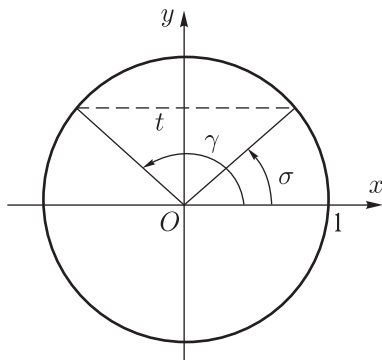


Рис. 3.40

Пример 3.45. Докажите равенство

$$\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \arcsin \frac{3}{5} + \operatorname{arctg} \frac{17}{19} = \frac{3}{4}\pi.$$

Решение. В левой части равенства содержится сумма числовых значений трех различных обратных тригонометрических функций. Заменим числа $\arcsin \frac{3}{5}$ и $\operatorname{arctg} \frac{2}{3}$ соответствующими значениями арктангенса:

$$\arcsin \frac{3}{5} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{3}{5}}{\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}} = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}; \quad \operatorname{arctg} \frac{2}{3} = \operatorname{arctg} \frac{3}{2}.$$

Были использованы формулы 28 и 38 из группы тождеств Е.

В результате доказываемое равенство принимает следующий вид:

$$\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \operatorname{arctg} \frac{17}{19} = \frac{3}{4}\pi. \quad (3.23)$$

Найдем сначала угол $\gamma = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$. Обозначим $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{3}{4}$. Поскольку произведение $xy = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} > 1$ и $x > 0$, то $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$; в соответствии с формулой 43 группы тождеств F имеем

$$\gamma = \pi + \operatorname{arctg} \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}} = \pi + \operatorname{arctg}(-18) = \pi - \operatorname{arctg} 18.$$

С учетом полученного результата равенство (3.23) принимает следующий вид:

$$\pi - \operatorname{arctg} 18 + \operatorname{arctg} \frac{17}{19} = \frac{3}{4}\pi, \text{ или } \operatorname{arctg} 18 - \operatorname{arctg} \frac{17}{19} = \frac{\pi}{4}. \quad (3.24)$$

Оценим угол $\sigma = \operatorname{arctg} 18 - \operatorname{arctg} \frac{17}{19}$. Имеем:

$$0 < \operatorname{arctg} \frac{17}{19} < \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{3} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} < \operatorname{arctg} 18 < \frac{\pi}{2}.$$

Из этих оценок следует, что $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} < \sigma < \frac{\pi}{2} - 0$, т.е. $\sigma \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. На этом промежутке функция $\operatorname{tg} x$ является монотонно возрастающей, и если окажется, что $\operatorname{tg} \sigma = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, то это будет означать, что равенство (3.24), а значит, и исходное равенство являются верными.

Находим

$$\operatorname{tg} \sigma = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 18) - \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{17}{19} \right) = \frac{18 - \frac{17}{19}}{1 + 18 \cdot \frac{17}{19}} = 1,$$

т.е. действительно $\operatorname{tg} \sigma = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, $\sigma = \frac{\pi}{4}$. ■

Замечание. Разумеется, что при доказательстве (3.24) можно было воспользоваться формулой 44 из группы тождеств F, в соответствии с которой

$$\operatorname{arctg} 18 - \operatorname{arctg} \frac{17}{19} = \operatorname{arctg} \frac{18 - \frac{17}{19}}{1 + 18 \cdot \frac{17}{19}} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 3.46. Докажите тождество

$$2 \operatorname{arctg} x = \arccos \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \text{ если } x \in [0; +\infty). \quad (3.25)$$

Решение. Обозначим $y = \operatorname{arctg} x$. Согласно определению функции арктангенса имеем $x = \operatorname{ctg} y$, $0 < y < \pi$, $x \in \mathbb{R}$.

Преобразуем выражение $\arccos \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ заменив в нем x на $\operatorname{ctg} y$:

$$\arccos \frac{\operatorname{ctg}^2 y - 1}{\operatorname{ctg}^2 y + 1} = \arccos(\cos^2 y - \sin^2 y) = \arccos(\cos 2y).$$

Но, согласно свойству функции арккосинус ($\arccos(\cos x) = x$ при $x \in [0; \pi]$), $\arccos(\cos 2y) = 2y$, если $2y \in [0; \pi]$, или $y \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

Таким образом, в новых обозначениях получаем тождество

$$2y = 2y, \text{ если } 0 < y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Это означает, что равенство (3.25) действительно является тождеством для $x \in [0, +\infty)$. ■

3.3. Задачи для самостоятельного решения

К подразделу 3.1

1. Найдите функцию $f^{-1}(x)$, обратную к заданной

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, & -3 \leq x \leq 3, \\ \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}, & 3 < x \leq 7, \end{cases}$$

и постройте графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$.

2. Найдите функцию $f^{-1}(x)$, обратную к заданной

$$f(x) = |2x - 1| - |x|, \quad x \leq \frac{1}{2},$$

и постройте графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$.

3. Найдите функцию $f^{-1}(x)$, обратную к заданной

$$f(x) = x^2 - 2x + 2, \quad x \geq 1,$$

и постройте графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$.

4. Используя результаты задачи 3, решите уравнение

$$x^2 - 2x + 1 = \sqrt{x - 1}.$$

5. Найдите функцию $f^{-1}(x)$, обратную к заданной

$$f(x) = \frac{2x + 5}{x + 2}, \quad x > -2,$$

и постройте графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$.

6. Найдите функцию $f^{-1}(x)$, обратную к заданной

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x < 4, \\ x^2 - 6x + 11, & x \geq 4, \end{cases}$$

и постройте графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$.

7. Найдите функцию $f^{-1}(x)$, обратную к заданной:

- а) $f(x) = x^4 - 2x^2$, $x \leq -1$; б) $f(x) = x^4 - 2x^2$, $-1 \leq x \leq 0$;
в) $f(x) = x^4 - 2x^2$, $0 \leq x \leq 1$; г) $f(x) = x^4 - 2x^2$, $x \geq 1$.

8*. Используя результаты задачи 7, решите уравнения:

- а) $x^4 - 2x^2 = -\sqrt{1 - \sqrt{1 + x}}$; б) $x^4 - 2x^2 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}$.

9. Решите уравнения:

- а) $x^3 + 8 = 9\sqrt[3]{9x - 8}$; б) $x^3 + 12 = 13\sqrt[3]{13x - 12}$.

10. Решите уравнение

$$f^{-1}(x) = 3x - 5,$$

если известно, что $f(2x + 1) = 6x + 9$.

11. Решите неравенство

$$x \cdot f^{-1}(x + 2) < 2x + 4,$$

если $f(x) = x + 3$.

12. Решите уравнение

$$4 \cdot f^{-1}(\cos^2 x) = 1 - \cos x,$$

если известно, что $f(2x + 3) = 4x + 6$.

13. Решите неравенство

$$f(3 \sin^2 x) \geq \frac{13}{3},$$

если известно, что $f^{-1}(x + 4) = 3x + 2$.

14. Найдите корни уравнения

$$3g^2(x) - 40g(x) + 77 = 0,$$

где $g(x)$ — функция, обратная к функции $y = \log_{1/3}(x - 2)$.

К п. 3.2.4

Вычислите значения выражений (15–35).

15. $\sin \left(2 \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arctg} 1 \right)$. **16.** $\sin \left(\arcsin \frac{2}{3} + \arccos \frac{1}{5} \right)$.

17. $\sin \left(2 \arccos \frac{2}{5} \right)$. **18.** $\cos \left(2 \arcsin \frac{1}{4} \right)$. **19.** $\sin^2(\operatorname{arctg} 5)$.

20. $\sin \left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right)$. **21.** $\operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{1}{3} \right)$. **22.** $\operatorname{tg} \left(2 \arcsin \frac{1}{3} \right)$.

$$\mathbf{23.} \operatorname{tg} \left(2 \arccos \frac{2}{5} \right). \mathbf{24.} \operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{3}{5} - \arccos \frac{1}{4} \right).$$

$$\mathbf{25.} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{2}{3} \right). \mathbf{26.} \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 5). \mathbf{27.} \operatorname{ctg} \left(2 \arccos \frac{1}{5} \right).$$

$$\mathbf{28.} \sin \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{15} \right). \mathbf{29.} \cos \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3} \right).$$

$$\mathbf{30.} \sin \left(\frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{4}{5} \right) \right). \mathbf{31.} \cos \left(\frac{1}{2} \arcsin \left(-\frac{5}{13} \right) \right).$$

$$\mathbf{32.} \cos(2 \operatorname{arctg} 3). \mathbf{33.} \operatorname{ctg} \left(\arccos \frac{4}{5} - \operatorname{arctg} 5 \right).$$

$$\mathbf{34.} \cos(\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 3). \mathbf{35.} \sin(\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2).$$

$$\mathbf{36.} \text{Докажите, что } \operatorname{arctg} 2 = \operatorname{arctg} 3 + \frac{\pi}{4}.$$

Вычислите значения выражений (37–56).

$$\mathbf{37.} \arcsin \left(\cos \frac{77}{6} \pi \right). \mathbf{38.} \arccos \left(\sin \frac{279}{5} \pi \right).$$

$$\mathbf{39.} \arcsin \left(\sin \frac{103}{8} \pi \right). \mathbf{40.} \arccos \left(\cos \frac{101}{18} \pi \right).$$

$$\mathbf{41.} \arccos \left(\sin \left(-\frac{\pi}{8} \right) \right). \mathbf{42.} \arccos \left(\sin \left(-\frac{28}{5} \pi \right) \right).$$

$$\mathbf{43.} \arccos \left(-\cos \frac{29}{6} \pi \right). \mathbf{44.} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{45}{7} \pi \right).$$

$$\mathbf{45.} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{47}{7} \pi \right). \mathbf{46.} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{65}{9} \pi \right).$$

$$\mathbf{47.} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{103}{13} \pi \right). \mathbf{48.} \operatorname{arctg} \left(-\operatorname{tg} \frac{89}{11} \pi \right).$$

$$\mathbf{49.} \arcsin(\sin 16). \mathbf{50.} \arccos(\cos 23). \mathbf{51.} \arcsin(\cos 8).$$

$$\mathbf{52.} \arccos(\sin 12). \mathbf{53.} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 13). \mathbf{54.} \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 11).$$

$$\mathbf{55.} \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 5). \mathbf{56.} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 18).$$

57. Постройте график функции $y = \arccos(\sin x)$ и вычислите:

а) $\arccos(\sin 17)$; б) $\arccos(\sin 3)$;

в) $\arccos(\sin(-10))$; г) $\arccos(-\sin 19)$.

58. Постройте график функции $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x)$ и вычислите:

а) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 14)$; б) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 25)$;

в) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(-3))$; г) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(-12))$.

59. Постройте график функции $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x)$ и вычислите:

- а) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 7)$; б) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 15)$;
в) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(-5))$; г) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(-13))$.

60. Постройте график функции $y = \operatorname{arccctg}(\operatorname{tg} x)$ и вычислите:

- а) $\operatorname{arccctg}(\operatorname{tg} 9)$; б) $\operatorname{arccctg}(\operatorname{tg} 16)$;
в) $\operatorname{arccctg}(\operatorname{tg}(-7))$; г) $\operatorname{arccctg}(-\operatorname{tg} 17)$.

К п. 3.2.5

Решите уравнения (61–110).

61. а) $\arcsin x = -1,5$; б) $\arcsin x = \frac{\pi}{6}$;

в) $\arcsin x = 1,6$; г) $\arcsin x = -\frac{4}{9}\pi$.

62. а) $\arccos x = \frac{\pi}{6}$; б) $\arccos x = \frac{39}{40}\pi$;

в) $\arccos x = 3$; г) $\arccos x = 3,42$.

63. а) $\arcsin x = \frac{\pi}{3}$; б) $\arccos x = \frac{\pi}{3}$;

в) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{3}$; г) $\operatorname{arccctg} x = \frac{\pi}{3}$.

64. а) $\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{6}$; б) $\operatorname{arctg} x = 1$;

в) $\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$; г) $\operatorname{arctg} x = -1,5$.

65. а) $\operatorname{arccctg} x = \frac{1}{2}$; б) $\operatorname{arccctg} x = \frac{5}{6}\pi$;

в) $\operatorname{arccctg} x = 3$; г) $\operatorname{arccctg} x = -\frac{\pi}{6}$.

66. а) $\arcsin x + \arccos x = 1$; б) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{3}$;

в) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

67. а) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccctg} x = \pi$; б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccctg} x = 2$;

в) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccctg} x = \frac{\pi}{2}$.

68. $18 \arcsin^2 x - 3\pi \arcsin x - \pi^2 = 0$.

69. $2 \arcsin^2 x - \arcsin x - 3 = 0$.

70. $6 \arccos^2 x - 7\pi \arccos x + 2\pi^2 = 0$.

71. $6 \arccos^2 x + \pi \arccos x - 2\pi^2 = 0$.

72. $9 \operatorname{arctg}^2 2x - 3\pi \operatorname{arctg} 2x - 2\pi^2 = 0$.

73. $2 \operatorname{arccctg}^2 x - 7 \operatorname{arccctg} x + 5 = 0$.

$$\mathbf{74.} \arcsin x = \arccos x. \quad \mathbf{75.} \arcsin 3x = \arccos 4x.$$

$$\mathbf{76.} 2 \arcsin x + 3 \arccos x = \pi. \quad \mathbf{77.} 4 \operatorname{arctg} x + 8 \operatorname{arcctg} x = 3\pi.$$

$$\mathbf{78.} 3 \operatorname{arctg}(2x) + 4 \operatorname{arcctg}(2x) = \frac{5}{3}\pi.$$

$$\mathbf{79.} 3 \arcsin(4x) + 6 \arccos(4x) = 4\pi.$$

$$\mathbf{80.} \arcsin^2 x + \arccos^2 x = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$\mathbf{81.} \arcsin^2 x + \arccos^2 x = \frac{5}{36}\pi^2.$$

$$\mathbf{82.} \arcsin^2 x + \arccos^2 x = \frac{17}{36}\pi^2.$$

$$\mathbf{83.} \operatorname{arctg}^2 x + 4 \operatorname{arcctg}^2 x = \frac{5}{16}\pi^2.$$

$$\mathbf{84.} \arcsin 3x \cdot \arccos 3x = -\frac{\pi^2}{9}.$$

$$\mathbf{85.} \arcsin(x-1) \cdot \arccos(x-1) = \frac{\pi^2}{18}.$$

$$\mathbf{86.} \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arcctg} x = -\frac{5}{18}\pi^2. \quad \mathbf{87.} \frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{\operatorname{arcctg}(x+1)} = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbf{88.} \frac{\arcsin(\sqrt{3}x)}{\arccos^2(\sqrt{3}x)} = \frac{12}{\pi}.$$

$$\mathbf{89.} \text{ а) } \arcsin x^2 = \frac{\pi}{3}; \text{ б) } \arcsin x^2 = \frac{3}{2};$$

$$\text{ в) } \operatorname{arctg} x^2 = \frac{\pi}{4}; \text{ г) } \operatorname{arctg} x^2 = 1.$$

$$\mathbf{90*} \arccos(\sin x) = \frac{x}{7} + \frac{\pi}{2}. \quad \mathbf{91*} \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = \pi - \frac{x}{3}.$$

$$\mathbf{92*} \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) = \frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}. \quad \mathbf{93.} \cos(\arccos x - \arcsin x) = x^2 - 1.$$

$$\mathbf{94*} \arcsin\left(\sin \frac{2}{x}\right) = \sqrt{x+2} - 1 \text{ при } |x| > \frac{3}{2}.$$

$$\mathbf{95.} \arccos x = \operatorname{arctg} x. \quad \mathbf{96*} \arccos(1-x) = \frac{\pi}{2x}.$$

$$\mathbf{97*} \frac{1}{\pi} \arcsin(\cos \pi x) = x^2 - 4x + \frac{15}{4}.$$

$$\mathbf{98.} \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{2}{x^2+2} = |x| + 1. \quad \mathbf{99*} \frac{4}{\pi} \operatorname{arcctg} \frac{2}{x^2+2} = 6x - x^2 - 8.$$

$$100. \cos^2(\operatorname{arctg} x) + \sin^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{2}{\pi} \arcsin x.$$

$$101. \sqrt{\cos^2(\operatorname{arctg} x) - \sin^2(\operatorname{arctg} x)} = x^2 - 1.$$

$$102. \sin\left(\frac{\arccos x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\arcsin(x-1)}{2}\right).$$

$$103^*. \sin(\operatorname{arctg} x) + \cos(\operatorname{arctg} x) = \sin(\arccos x).$$

$$104^*. \cos(3 \arccos x) = x. \quad 105^*. \cos(3 \arcsin x) + \sqrt{\frac{x^2 + 1}{3}} = 0.$$

$$106^*. \sin(3 \arcsin x) = \frac{1}{4x}. \quad 107. |\arcsin x| + \arccos x = 0.$$

$$108. |\arcsin(x-1)| + \arccos x = 0. \quad 109. \frac{2}{\pi} \arcsin x = x^2 - 2x + 2.$$

$$110. \frac{1}{\pi} \arccos = x^2 - 4x + 5.$$

111*. Найдите сумму корней уравнения

$$\frac{4}{\pi} \arcsin\left(\sin \frac{\pi x}{4}\right) = 6 - \frac{x}{4}.$$

112*. Найдите сумму корней уравнения

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}\right) = \pi\left(2 - \frac{x}{8}\right).$$

113*. Найдите первые два наименьших корня уравнения

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \pi x) + \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} \pi x) = \frac{\pi}{2x}.$$

114*. Решите уравнение

$$2 \cos\left(\arccos \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{\pi} \arccos(\cos \pi x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$$

Решите неравенства (115–144).

$$115. \text{ а) } \arcsin x < -\frac{\pi}{3}; \text{ б) } \arcsin x > -\frac{\pi}{6};$$

$$\text{ в) } -2 < \arcsin x < 1; \text{ г) } \frac{1}{2} < |\arcsin x| \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$116. \text{ а) } \arccos x < \frac{5}{6}\pi; \text{ б) } \arccos x > \frac{\pi}{3};$$

$$\text{ в) } 0 < \arccos x < 3; \text{ г) } \arccos |x| \geq \frac{\pi}{6}.$$

- 117.** а) $\operatorname{arctg} x \leq \frac{\pi}{4}$; б) $\operatorname{arctg} x > -\frac{2}{3}\pi$;
 в) $|\operatorname{arctg} x| > \frac{\pi}{6}$; г) $-\frac{3}{2} < \operatorname{arctg} x \leq 1$.
- 118.** а) $\operatorname{arctg} x \geq \frac{2}{3}\pi$; б) $\operatorname{arctg} x < 3,1$;
 в) $\operatorname{arctg} |x| < \frac{\pi}{6}$; г) $\frac{\pi}{6} < \operatorname{arctg} x \leq \frac{5}{6}\pi$.
- 119.** $\arcsin(x - 5) \leq \arcsin(2x - 9)$.
- 120.** $\arccos(2x - 3) \geq \arccos(3x - 2)$.
- 121.** $\arccos(x + 2) < \arccos(2x + 3)$.
- 122.** $\arcsin^2 x + \frac{\pi}{6} \arcsin x - \frac{\pi^2}{18} \leq 0$.
- 123.** $\arccos^2 x - \frac{7}{12}\pi \arccos x + \frac{\pi^2}{12} > 0$.
- 124.** $\operatorname{arctg}^2 x - \frac{\pi}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{2}{9}\pi^2 \geq 0$.
- 125.** $\operatorname{arctg}^2 x - \frac{11}{12}\pi \operatorname{arctg} x + \frac{\pi^2}{8} < 0$.
- 126.** $\arccos x \cdot \arcsin x \leq -\frac{5}{18}\pi^2$.
- 127.** $\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arctg} x > -\frac{5}{18}\pi^2$. **128.** $\frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{\operatorname{arctg}(x+1)} \geq 1$.
- 129.** $\frac{\arcsin(\sqrt{3}x)}{\arccos^2(\sqrt{3}x)} \geq \frac{12}{\pi}$. **130.** $\frac{\arcsin(\sqrt{3}x)}{\arccos^2(\sqrt{3}x)} < \frac{12}{\pi}$.
- 131.** $\frac{\pi}{6} < \arcsin x^2 < \frac{\pi}{3}$. **132.** $\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{arctg} x^2 \leq 1$.
- 133.** $\arcsin^2 x + \arccos^2 x \leq \frac{\pi^2}{8}$.
- 134.** $\arcsin^2 x + \arccos^2 x < \frac{5}{36}\pi^2$.
- 135.** $\arcsin^2 x + \arccos^2 x \geq \frac{5}{36}\pi^2$.
- 136.** $\operatorname{arctg}^2 x + 4 \operatorname{arctg}^2 x \leq \frac{5}{16}\pi^2$. **137.** $\operatorname{arctg} x \geq \arcsin x$.
- 138.** $\arccos(2 - x) < \arccos(x - 1)$. **139.** $\arccos(1 - x) \geq \frac{\pi}{2x}$.

$$140*. (7 - 4\sqrt{3})x \leq \frac{1}{\pi} \arccos(\cos \pi x) \leq \frac{1}{x}.$$

$$141. \frac{1}{\pi} \arcsin(\cos \pi x) \geq x^2 - 4x + \frac{15}{4}.$$

$$142*. \arccos(\sin x) \leq \frac{x}{7} + \frac{\pi}{2}. \quad 143*. \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \leq -\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}.$$

$$144*. \arcsin(\cos x) \geq \arccos(\cos x).$$

145*. Найдите максимальную длину промежутка, содержащего решения неравенства

$$\frac{4}{\pi} \arcsin\left(\sin \frac{\pi x}{4}\right) \leq 6 - \frac{x}{4}$$

при $x > 16$.

146*. Найдите максимальную длину промежутка, содержащего решения неравенства

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \pi x) + \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} \pi x) \leq \frac{\pi}{2x}$$

при $x > \frac{1}{2}$.

147*. Найдите значения параметра a , при которых уравнение

$$\arcsin x + 2 \arccos x = a$$

имеет решения, и найдите эти решения.

148*. Найдите значения параметра a , при которых уравнение

$$\arcsin^2 x + 4 \arccos^2 x = a^2$$

имеет решения, и найдите эти решения.

К. п. 3.2.6

Вычислите значения выражений (149–156).

$$149. \arcsin \frac{2}{3} + \arcsin \frac{\sqrt{5}}{3}. \quad 150. \operatorname{arctg} \frac{5}{12} + \arcsin \frac{12}{13}.$$

$$151. \arcsin \frac{2}{\sqrt{13}} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{26}}.$$

$$152. \arccos \frac{7}{\sqrt{53}} + \arcsin \frac{5}{\sqrt{106}}.$$

$$153. \arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{33}{65}.$$

$$154. \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \operatorname{arctg} \frac{5}{12} + \operatorname{arctg} \frac{33}{56}.$$

$$155. \arcsin \frac{1}{3} - \arccos \frac{1}{3} + \arcsin \frac{7}{9}.$$

$$156. \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{11}{7}.$$

Докажите справедливость равенств (157–170).

$$157. \arccos \left(-\frac{6\sqrt{2}}{19} \right) - \arccos \frac{17}{19} = \frac{\pi}{2}.$$

$$158. \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{3}{5} = \arccos \frac{33}{65}.$$

$$159. \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{2}{7} + \operatorname{arctg} \frac{8}{25} = \frac{\pi}{4}.$$

$$160. \operatorname{arctg} 2\sqrt{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2\sqrt{2} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$161. \operatorname{arctg} \frac{4}{5} - \operatorname{arctg} \frac{3}{14} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

$$162. \operatorname{arctg} \frac{2}{3} - \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + \operatorname{arctg}(-2) = \pi.$$

$$163. 2 \arccos \frac{4}{5} = \arcsin \frac{24}{25}. \quad 164. 2 \operatorname{arctg} \frac{2}{5} = \arccos \frac{21}{29}.$$

$$165. 2 \arccos \frac{3}{5} + \operatorname{arctg} \frac{7}{24} = \pi. \quad 166. 2 \arcsin \frac{1}{3} = \arccos \frac{7}{9}.$$

$$167. \frac{1}{2} \arccos \frac{2}{5} = \arcsin \sqrt{\frac{3}{10}}. \quad 168. \arcsin \frac{11}{16} = 3 \arcsin \frac{1}{4}.$$

$$169. \arccos \left(-\frac{9}{16} \right) = 3 \arccos \frac{3}{4}. \quad 170. \operatorname{arctg} \frac{47}{52} = 3 \operatorname{arctg} \frac{1}{4}.$$

Докажите тождества (171–182).

$$171. 2 \arcsin x = \begin{cases} \arccos(1 - 2x^2), & x \in [0; 1]; \\ -\arccos(1 - 2x^2), & x \in [-1; 0]. \end{cases}$$

$$172. \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) = \arccos(2x^2 - 1), \quad x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1 \right].$$

$$173. 2 \arccos x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}), \quad x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1 \right].$$

$$174. 2 \arccos x = \arccos(2x^2 - 1), \quad x \in [0; 1].$$

$$175. 2 \operatorname{arctg} x = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}, x \in [0; +\infty).$$

$$176. 2 \operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}, x \in [-1; 1].$$

$$177. \frac{1}{2} \arccos x = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{2}}, x \in [-1; 1].$$

$$178. \arccos x = 2 \arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}}, x \in [-1; 1].$$

$$179. \operatorname{arctg} x = 2 \operatorname{arctg} \frac{-1 + \sqrt{1+x^2}}{x}, x \neq 0.$$

$$180. 3 \arcsin x = \arcsin(3x - 4x^3), x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

$$181. 3 \arccos x = \arccos(4x^3 - 3x), x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right].$$

$$182. 3 \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}, x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

Задачи вступительных экзаменов

183. (МГУ, факультет вычислительной математики и кибернетики — ВМиК, 1996 г.) Решите неравенство

$$\arccos(3x) + \arcsin(x+1) \leq \frac{7\pi}{6}.$$

184. (МГУ, экономический факультет, 1996 г.) Найдите все значения a , при которых фигура, заданная на координатной плоскости условием

$$|y| \leq \left(\sqrt{a - |x|}\right)^2 + \arcsin(\sin(a - |x|)),$$

представляет собой 14-угольник.

185. (МГУ, ВМиК, 1999 г.) Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$. Сравните числа $\arccos(-\sqrt{-3 \cos \alpha - 1})$ и $\frac{19}{24}\pi$.

186. (МГУ, экономический факультет, 1999 г.) Решите уравнение $x + \frac{1}{8} \arcsin(\sin 17x - 2 \sin 5x \cdot \sin 3x) = \frac{\pi}{16}$.

187. (МГУ, факультет государственного управления, 2001 г.) Решите уравнение

$$\arcsin \left(\cos \left(\pi - \frac{2x^2 + 7x - 8}{x^2 - 5x + 7} \right) - \frac{1}{2} \right) - \frac{\pi}{6} = 0.$$

188. (МГУ, географический факультет, 2001 г.) Решите уравнение

$$4 \arcsin(2^x - 7) - \arccos(5^x - 124) = \frac{6\pi}{x}.$$

189. (МГУ, ВМиК, 2002 г.) Решите неравенство

$$\sin(\arccos x) - \sqrt{3} \cos \left(\frac{1}{2} \arccos x \right) \leq 0.$$

190. (МГУ, институт стран Азии и Африки, 2002 г.) Решите систему

$$\begin{cases} \arcsin 3x + \arccos 2y = \frac{\pi}{4}, \\ \arccos 3x \cdot \arcsin 2y = \frac{6\pi^2}{64} \end{cases}$$

и для каждого решения сравните: $3x - 2y \vee \frac{1}{2} - \sqrt[4]{2}$.

191. (МГУ, механико-математический факультет, 2003 г.) Найдите все a , при которых уравнение

$$\sin(\arccos 5x) = a + \arcsin(\sin(7x - 3))$$

имеет единственное решение.

192. (МГУ, ВМиК, 2003 г.) Решите неравенство

$$\arcsin(\sin x) + 2 \arccos(\cos x) \leq x - 5.$$

193. (МФТИ, 1992 г.) Решите уравнение

$$\operatorname{arctg} 3x = \arccos 8x.$$

194. (МФТИ, 1992 г.) Решите уравнение

$$2 \arcsin 2x = \arccos 7x.$$

195. (МФТИ, 1992 г.) Решите уравнение

$$\arcsin 5x = \operatorname{arctg} 6x.$$

196. (МФТИ, 1992 г.) Решите уравнение

$$2 \arccos x = \arccos \frac{7}{3}x.$$

197. (ГУ ВШЭ, 2003 г.) Произведение всех корней уравнения

$$\sin^2 \left(3 \sin \left(\arcsin \frac{x}{3} \right) \right) = \frac{1}{2}$$

равно:

$$1) \frac{3\pi^2}{16}; 2) -\frac{1}{4}; 3) -\frac{\pi^2}{16}; 4) -\frac{3\pi^3}{64}; 5) \frac{9\pi^4}{156}.$$

198. (ГУ ВШЭ, 2003 г.) Уравнение $\sin \left(\frac{\arccos \left(\frac{2}{x} \right)}{2} \right) = \sqrt{\frac{9}{x}}$

имеет корень, принадлежащий промежутку:

$$1) [2; 7); 2) [7; 13); 3) [13; 16); 4) [16; 19); 5) [19; 999).$$

199. (ГУ ВШЭ, 2003 г.) Сколько имеется различных целочисленных значений параметра p , при которых уравнение

$$196 \sin \left(\arcsin \frac{x}{196} \right) = \frac{(x-p)^2}{4}$$

имеет единственный корень:

$$1) 54 \text{ или меньше}; 2) 55; 3) 56; 4) 57; 5) 58 \text{ или больше?}$$

200. (ГУ ВШЭ, 2003 г.) Уравнение

$$\cos \left(\frac{\arcsin \sqrt{1 - \frac{49}{100}x^2}}{2} \right) = 2x$$

имеет корень, принадлежащий промежутку:

$$1) [0; 0,2); 2) [0,2; 0,3); 3) [0,3; 0,4); 4) [0,4; 0,5); 5) [0,5; 999).$$

201. (ГУ ВШЭ, 2004 г.) Найдите сумму всех положительных корней уравнения

$$\arcsin \left[\sin \left(3\pi \cos \left(\arccos \frac{x}{18} \right) \right) \right] = \frac{\pi}{6}$$

и укажите остаток от деления ближайшего натурального числа на 5:

$$1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 0.$$

202. (ГУ ВШЭ, 2004 г.) Сумма всех различных корней уравнения

$$\frac{2}{\pi} \arcsin \left(\sin \frac{\pi x}{2} \right) = \frac{17 - x}{3}$$

равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен:

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 0.

203. (ГУ ВШЭ, 2004 г.) Если N — количество различных корней уравнения

$$\frac{2}{\pi} \arcsin \left(\sin \frac{\pi x}{2} \right) = \frac{(x - 48)^2}{81},$$

то остаток от деления N на 5 равен:

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 0.

204. (ГУ ВШЭ, 2004 г.) Вычислите значение выражения

$$65 \sin \left(\arcsin \frac{4}{5} - \arcsin \frac{5}{13} \right)$$

и укажите остаток от деления ближайшего натурального числа на 5:

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 0.

205. (ГУ ВШЭ, 2004 г.) Если d — дробная часть числа, равного наибольшему решению неравенства

$$\frac{2}{\pi} \arcsin \left(\sin \frac{\pi x}{2} \right) \geq \frac{1}{4} \sin \left(\arcsin \frac{x}{20} \right),$$

то:

1) $d \in [0; 0,21)$; 2) $d \in [0,21; 0,27)$; 3) $d \in [0,27; 0,37)$;

4) $d \in [0,37; 0,47)$; 5) $d \in [0,47; 1)$.

3.4. Указания и ответы

Указания

8–9. См. пример 3.5.

90. См. пример 3.37 и задачу 57.

91. См. задачу 58.

92. См. задачу 59.

97. Построить графики функций

$$y_1(x) = \frac{1}{\pi} \arcsin(\cos \pi x), \quad y_2(x) = x^2 - 4x + \frac{15}{4}.$$

Из анализа графиков получить, что исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4x + \frac{15}{4} = x - \frac{3}{2}, & 1 \leq x \leq 2, \\ x^2 - 4x + \frac{15}{4} = \frac{5}{2} - x, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

98. Поскольку $\frac{2}{\pi} \arcsin \frac{2}{x^2+2} \leq 1$, а $|x| + 1 \geq 1$ для любых $x \in \mathbb{R}$, то решение уравнения, если оно существует, должно удовлетворять системе

$$\begin{cases} \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{2}{x^2+2} = 1, \\ |x| + 1 = 1. \end{cases}$$

99. Показать, что $1 \leq \frac{4}{\pi} \operatorname{arccotg} \frac{2}{x^2+2} < 2$, а $6x - x^2 - 8 \leq 1$; составить и решить соответствующую систему уравнений. Целесообразно построить графики функций

$$y_1(x) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arccotg} \frac{2}{x^2+2} \quad \text{и} \quad y_2(x) = 6x - x^2 - 8.$$

105. Используя формулу косинуса тройного аргумента, получить уравнение

$$4 \left(\sqrt{1-x^2} \right)^3 - 3\sqrt{1-x^2} + \sqrt{\frac{x^2+1}{3}} = 0.$$

Решить его на ОДЗ: $x \in [-1; 1]$. Для решения полученного уравнения целесообразно разделить обе его части на $\sqrt{1-x^2}$ ($x = \pm 1$ не является решением уравнения) и ввести замену переменной $t = \sqrt{\frac{x^2+1}{1-x^2}}$.

107. Так как $|\arcsin x| \geq 0$ и $\arccos x \geq 0$ на ОДЗ, то исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} |\arcsin x| = 0, \\ \arccos x = 0. \end{cases}$$

109–110. Использовать метод оценок (см. указание к задаче 98).

111. Построить графики функций

$$y_1(x) = \frac{4}{\pi} \arcsin \left(\sin \frac{\pi x}{4} \right) \quad \text{и} \quad y_2(x) = 6 - \frac{x}{4};$$

локализовать промежутки, на котором графики функций могут иметь общие точки

$$\left(6 - \frac{x}{4} = 2 \Rightarrow x = 16, 6 - \frac{x}{4} = -2 \Rightarrow x = 32, \text{ т. е. } x \in [16, 32]\right).$$

Затем составить и решить конечную совокупность уравнений.

112. См. указание к задаче 111.

113. Сложив графики функций $\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \pi x)$ и $\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} \pi x)$, получить график функции

$$y_1(x) = \frac{1}{\pi} (\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \pi x) + \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} \pi x)) =$$

$$= \begin{cases} 2x, & x \in \left(0; \frac{1}{2}\right), \\ 2\left(x - \frac{1}{2}\right), & x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right), \\ \dots & \\ 2\left(x - n\frac{1}{2}\right), & x \in \left(\frac{n}{2}; \frac{n+1}{2}\right), \\ \dots & \end{cases}$$

Проанализировать функции $y_1(x)$ и $y_2(x) = \frac{1}{2x}$, составить и решить соответствующую совокупность уравнений.

114. Показать, что

$$y_1(x) = 2 \cos\left(\arccos \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{\pi} \arccos(\cos \pi x) =$$

$$= \begin{cases} 2x + 2, & x \in [-2; -1), \\ 0, & x \in [-1, 0), \\ 2x, & x \in [0, 1), \\ 2, & x \in [1, 2). \end{cases}$$

Составить и решить совокупность четырех уравнений.

119. Из свойств арксинуса:

$$\arcsin(x - 5) \leq \arcsin(2x - 9) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 \leq 2x - 9, \\ -1 \leq x - 5 \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 5, \\ -1 \leq 2x - 9 \leq 1. \end{cases}$$

120. Учесть, что $\arccos x$ — монотонно убывающая функция.

140. Построить графики функций

$$y_1(x) = (7 - 4\sqrt{3})x, \quad y_2(x) = \frac{1}{\pi} \arccos(\cos \pi x), \quad y_3(x) = \frac{1}{x}.$$

Из анализа функций и их графиков найти границы промежутков, на которых выполняется неравенство.

141. См. задачу 97.

142. См. задачу 90.

143. Построить графики функций $y_1 = \arctg(\tg x)$ и $y_2 = -\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}$.

144. Построить графики функций $y_1 = \arcsin(\cos x)$ и $y_2 = \arccos(\cos x)$.

145. См. задачу 111.

146. См. задачу 113.

147. Положить $\arcsin x = t$, $\arccos x = \frac{\pi}{2} - t$ и учесть, что $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

148. Обозначив $\arcsin x = t$, $\arccos x = \frac{\pi}{2} - t$, получить квадратное уравнение $5t^2 - 4\pi t + \pi^2 - a^2 = 0$. Найти координаты вершины параболы $\left(t_0 = \frac{2\pi}{5}\right)$. Далее рассмотреть два случая:

- 1) уравнение имеет два корня, если $\begin{cases} D \geq 0, \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0, \end{cases}$ где $f(t) = 5t^2 - 4\pi t + \pi^2 - a^2$;
- 2) уравнение имеет один корень $t < t_0$, если $\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0, \\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \geq 0. \end{cases}$

Ответы

1. $f^{-1}(x) = \begin{cases} 2x - 1, & -1 \leq x \leq 2, \\ \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}, & 2 < x \leq 8. \end{cases}$
2. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{-x}{3} + \frac{1}{3}, & -\frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 1 - x, & x \geq 1. \end{cases}$
3. $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 1}$, $x \geq 1$.
4. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.
5. $f^{-1}(x) = \frac{5 - 2x}{x - 2}$, $x > 2$.
6. $f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 2, \\ 3 + \sqrt{x - 2}, & x \geq 2. \end{cases}$
7. а) $f^{-1}(x) = -\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}$, $x \geq -1$; б) $f^{-1}(x) = -\sqrt{1 - \sqrt{1 + x}}$, $-1 \leq x \leq 0$; в) $f^{-1}(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 + x}}$, $-1 \leq x \leq 0$; г) $f^{-1}(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}$, $x \geq -1$.
8. а) $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$; б) $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
9. а) $x_1 = 1$,

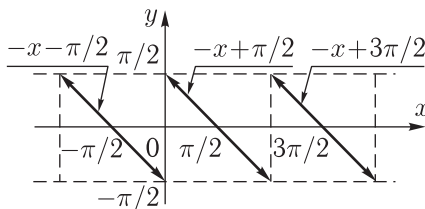


Рис. 3.43

60. Рис. 3.44; а) $\frac{7}{2}\pi - 9$; б) $\frac{11}{2}\pi - 16$; в) $7 - \frac{3}{2}\pi$; г) $17 - \frac{9}{2}\pi$.

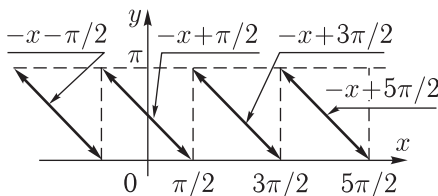


Рис. 3.44

61. а) $x = -\sin 1,5$; б) $x = \frac{1}{2}$; в) $\emptyset$; г) $x = -\sin \frac{4}{9}\pi$.
 62. а) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $x = \cos \frac{39}{40}\pi$; в) $x = \cos 3$; г) $\emptyset$. 63. а) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
 б) $x = \frac{1}{2}$; в) $x = \sqrt{3}$; г) $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 64. а) $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $x = \operatorname{tg} 1$;
 в) $\emptyset$; г) $x = -\operatorname{tg} 1,5$. 65. а) $x = \operatorname{ctg} \frac{1}{2}$; б) $x = -\sqrt{3}$; в) $x = \operatorname{ctg} 3$;
 г) $\emptyset$. 66. а) $\emptyset$; б) $\emptyset$; в) $x \in [-1; 1]$. 67. а) $\emptyset$; б) $\emptyset$;
 в) $x \in \mathbb{R}$. 68. $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 69. $x_1 = -\sin 1$, $x_2 = \sin \frac{3}{2}$.
 70. $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 0$. 71. $x = 0$. 72. $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. 73. $x_1 = \operatorname{ctg} 1$,
 $x_2 = \operatorname{ctg} \frac{5}{2}$. 74. $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 75. $x = \frac{1}{5}$. 76. $x = 1$. 77. $x = 1$.
 78. $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 79. $x = -\frac{\sqrt{3}}{8}$. 80. $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 81. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 82. $x = -\frac{1}{2}$. 83. $x = 1$. 84. $x = -\frac{1}{6}$. 85. $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 86. $x = -\sqrt{3}$. 87. $x = \frac{\sqrt{3}}{3} - 1$. 88. $x = \frac{1}{2}$. 89. а) $x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$,
 б) $x_{1,2} = \pm \sqrt{\sin \frac{3}{2}}$, в) $x_{1,2} = \pm 1$, г) $x_{1,2} = \pm \sqrt{\operatorname{tg} 1}$. 90. $x_1 = 0$,

- $x_{2,3} = \pm \frac{7}{6}\pi$, $x_{4,5} = \pm \frac{7}{4}\pi$, $x_{6,7} = \pm \frac{7}{2}\pi$. **91.** $x_1 = \frac{3}{4}\pi$, $x_2 = \frac{3}{2}\pi$,
 $x_3 = \frac{9}{4}\pi$. **92.** $x_1 = -\frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \frac{5}{4}\pi$. **93.** $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $x_2 = -1$,
 $x_3 = 1$. **94.** $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. **95.** $x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. **96.** $x = 1$.
97. $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{5}{2}$. **98.** $x = 0$. **99.** $\emptyset$. **100.** $x = 1$. **101.** $x_{1,2} = \pm 1$.
102. $x = 0$. **103.** $x_1 = 0$, $x_2 = -1$. **104.** $x_{1,2} = \pm 1$, $x_3 = 0$.
105. $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{6}}$. **106.** $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}$,
 $x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$. **107.** $\emptyset$. **108.** $x = 1$. **109.** $x = 1$. **110.** $\emptyset$.
111. **120.** **112.** **80.** **113.** $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. **114.** $x_1 = -\frac{6}{5}$,
 $x_2 = -\frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{2}{5}$, $x_4 = 2$. **115.** а) $-1 \leq x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{1}{2} < x \leq 1$;
в) $-1 \leq x < \sin 1$; г) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x < -\sin \frac{1}{2}$; $\sin \frac{1}{2} < x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.
116. а) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < x \leq 1$; б) $-1 \leq x < \frac{1}{2}$; в) $\cos 3 < x < 1$;
г) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. **117.** а) $x \leq 1$; б) $x \in \mathbb{R}$; в) $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$;
г) $-\operatorname{tg} \frac{3}{2} < x \leq \operatorname{tg} 1$. **118.** а) $x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $x > \operatorname{ctg} 3,1$; в) $|x| > \sqrt{3}$;
г) $-\sqrt{3} \leq x < \sqrt{3}$. **119.** $4 \leq x \leq 5$. **120.** $x = 1$. **121.** $-2 \leq x < -1$.
122. $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$. **123.** $-1 \leq x < \frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2} < x \leq 1$. **124.** $x \leq$
 $-\sqrt{3}$. **125.** $-1 < x < \sqrt{3}$. **126.** $-1 \leq x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$. **127.** $x >$
 $-\sqrt{3}$. **128.** $x \geq 0$. **129.** $\frac{1}{2} \leq x < \frac{\sqrt{3}}{3}$. **130.** $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq x < \frac{1}{2}$.
131. $-\frac{\sqrt[4]{12}}{2} < x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt[4]{12}}{2}$. **132.** $-\sqrt{\operatorname{tg} 1} \leq x \leq -1$;
 $1 \leq x \leq \sqrt{\operatorname{tg} 1}$. **133.** $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **134.** $\frac{1}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}$. **135.** $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$;
 $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq 1$. **136.** $x \geq 1$. **137.** $-1 \leq x \leq 0$. **138.** $1 \leq x < \frac{3}{2}$.
139. $1 \leq x \leq 2$. **140.** $1 \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$; $1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$;

$x = 2 + \sqrt{3}$. **141.** $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$. **142.** $x = -\frac{7}{2}\pi$; $-\frac{7}{4}\pi \leq x \leq -\frac{7}{6}\pi$; $0 \leq x \leq \frac{7}{6}\pi$; $x \geq \frac{7}{4}\pi$. **143.** $x \leq \frac{\pi}{4}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = -1, -2, -3, \dots$; $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$; $\frac{3}{2}\pi < x \leq \frac{7}{4}\pi$. **144.** $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **145.** $\frac{16}{3}$. **146.** $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. **147.** $x = \sin a$ при $\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}\pi$. **148.** $x_{1,2} = \sin \frac{2\pi \pm \sqrt{5a^2 - \pi^2}}{5}$ при $\frac{\sqrt{5}}{5}\pi \leq |a| \leq \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \sin \frac{2\pi - \sqrt{5a^2 - \pi^2}}{5}$ при $\frac{\pi}{2} < |a| \leq \frac{\sqrt{17}}{2}\pi$.

149. $\frac{\pi}{2}$. **150.** $\frac{\pi}{2}$. **151.** $\frac{\pi}{4}$. **152.** $\frac{\pi}{4}$. **153.** $\frac{\pi}{2}$. **154.** $\frac{\pi}{2}$. **155.** 0. **156.** π .

183. $\frac{-5 - 2\sqrt{3}}{26} \leq x \leq 0$. **184.** $\frac{5}{2}\pi < a \leq \frac{7}{2}\pi$. **185.** $\arccos(-\sqrt{-3\cos\alpha - 1}) < \frac{19\pi}{24}$. **186.** $x_1 = \frac{\pi}{38}$, $x_2 = \frac{\pi}{30}$. **187.** $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_3 = 4$. **188.** $x = 3$. **189.** $x = -1$; $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. **190.** $x = -\frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{8}$, $y = -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{8}$; $3x - 2y < \frac{1}{2} - \sqrt[4]{2}$. **191.** $\pi - \frac{22}{5} \leq a \leq \pi - \frac{8}{5}$; $a = \pi - 3 + \frac{\sqrt{74}}{5}$. **192.** $\pi + \frac{5}{2} \leq x \leq 3\pi - \frac{5}{2}$; $x \geq \frac{11\pi + 5}{4}$. **193.** $x = \frac{\sqrt{2}}{12}$. **194.** $x = \frac{1}{8}$. **195.** $x = \frac{\sqrt{5}}{15}$. **196.** $\emptyset$. **197.** 5) $(\frac{9\pi^4}{256})$. **198.** 5) $([19; 999])$. **199.** 4) (57). **200.** 3) $([0,3; 0,4])$. **201.** 1) (1). **202.** 4) (4). **203.** 4) (4). **204.** 3) (3). **205.** 5) $(d \in [0,47; 1])$.

Раздел 4

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

4.1. Простейшие уравнения

Простейшими называются уравнения

$$\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad \operatorname{tg} x = a,$$

где a — заданное действительное число.

Уравнения $\sin x = a$ и $\cos x = a$ имеют решение только при $|a| \leq 1$.

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет решение при любом $a \in \mathbb{R}$.

При этом справедливы формулы

$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset, & \text{если } |a| > 1, \\ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}, & \text{если } |a| \leq 1; \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset, & \text{если } |a| > 1, \\ x = \pm \arccos a + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, & \text{если } |a| \leq 1; \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \ \forall a \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

Хотя все решения уравнения $\sin x = a$ при $|a| \leq 1$ задаются одной формулой $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, но фактически это уравнение при $0 < |a| < 1$ имеет две серии корней: $\arcsin a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и $\pi - \arcsin a + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Важные частные случаи:

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi n, \ n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение $\cos x = a$ при $0 < |a| < 1$ также имеет две серии корней: $\arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и $-\arccos a + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Важные частные случаи:

$$\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Замечание. Запись решений уравнений $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ в виде (4.1), (4.2) и (4.3) не отражает, строго говоря, того факта, что множество решений каждого такого уравнения — это бесконечное множество точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где, например, $x_n = \arctg a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, — решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$. Правильной, по мнению авторов книги [8], была бы запись $x_n = \arctg a + \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, показывающая явно, что n пробегает все целочисленные значения. Заметим, что запись решений уравнения $\operatorname{tg} x = a$ в виде $x_n = \arctg a + \pi n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ также корректна.

Соглашаясь в целом с приведенным замечанием, автор счел возможным сохранить в данном пособии традиционную форму записи решений тригонометрических уравнений и неравенств, полагая, что определенная условность формы записи не создает больших препятствий для правильного понимания ее истинного содержания.

Приводимые ниже примеры 4.1 и 4.2 простейших уравнений объясняют природу двух серий решений уравнений вида $\sin x = a$ и $\cos x = a$ при $0 < |a| < 1$.

Пример 4.1. Решите уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Прямая $\tilde{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает единичную окружность в двух точках M_1 и M_2 , расположенных симметрично относительно оси $O\tilde{y}$ (рис. 4.1). Этим точкам отвечают углы $\angle M_1OA = x_1$ и $\angle M_2OA = x_2 = \pi - x_1$.

Это означает, что числа

$$x_1 = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad x_2 = \pi - x_1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

являются решениями уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Поскольку $\sin x$ — 2π -периодическая функция, то решениями уравнения будут также все числа $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и $\frac{3}{4}\pi + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Если в условиях примера 4.1 заменить число $\frac{\sqrt{2}}{2}$ на a , $0 < |a| < 1$, и повторить рассуждения, приведенные при решении этого примера, то получим, что множества точек

$$\arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{и} \quad \pi - \arcsin a + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

являются решениями уравнения $\sin x = a$.

При этом обе серии корней можно объединить в одной формуле

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Однако важно помнить, что на самом деле и эта запись содержит две серии корней, порождаемых числами $x_1 = \arcsin a$ и $x_2 = \pi - \arcsin a$.

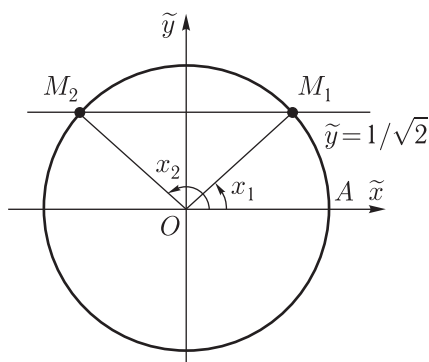


Рис. 4.1

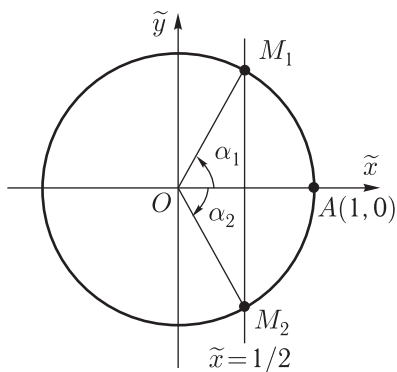


Рис. 4.2

Пример 4.2. Решите уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

Решение. Прямая $\tilde{x} = \frac{1}{2}$ пересекает единичную окружность в двух точках M_1 и M_2 , расположенных симметрично относительно оси $O\tilde{x}$ (рис. 4.2). Этим точкам отвечают углы $\angle M_1OA = x$ и $\angle M_2OA = -x$, т.е. числа $x_1 = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ и $x_2 = -x_1 = -\frac{\pi}{3}$ являются решениями уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$.

Поскольку $\cos x$ — периодическая функция с периодом 2π , то решением этого уравнения будут также все числа

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4.3. Решите уравнение $\operatorname{tg} x = 2$.

Решение. Из определения тангенса следует, что (рис. 4.3)

$$\operatorname{tg} x = 2 \Leftrightarrow \frac{AB}{OA} = \frac{2}{1} = 2.$$

Таким образом, для решения уравнения $\operatorname{tg} x = 2$ необходимо: на линии тангенсов отложить отрезок $AB = 2$; соединить точку B с началом координат. Тогда $x_1 = \angle BOA$ будет искомым углом, т.е. $\operatorname{tg} x_1 = 2$, откуда $x_1 = \operatorname{arctg} 2$. Поскольку

$$\operatorname{tg}(\pi + x_1) = \operatorname{tg} x_1,$$

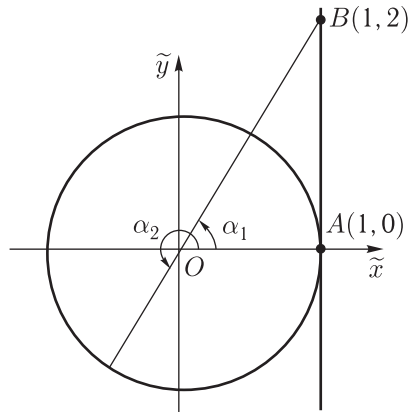


Рис. 4.3

то

$$x_2 = \pi + x_1 = \pi + \operatorname{arctg} 2$$

также будет решением уравнения $\operatorname{tg} x = 2$. Окончательно с учетом периодичности функции $\operatorname{tg} x$ имеем $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Приводимые ниже в примерах 4.4 и 4.5 уравнения также относятся к классу простейших. Однако нестандартный способ задания числа a в правой части этих уравнений придает этим уравнениям дополнительную сложность.

Пример 4.4. Решите уравнение $\sin x = \cos 1$.

Решение. Здесь $a = \cos 1$, и поскольку $0 < \cos 1 < 1$, то уравнение имеет решение, которое можно записать в стандартном виде $x = (-1)^n \arcsin(\cos 1) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Однако

$$\arcsin(\cos 1) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right) = \frac{\pi}{2} - 1,$$

и потому $x = (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Это решение удобно представить в виде двух серий — при n четном и при n нечетном:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} - 1 + \pi \cdot 2k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (n = 2k);$$

$$x_2 = -\left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \pi(2m + 1), \quad m \in \mathbb{Z} \quad (n = 2m + 1).$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} - 1 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{2} + 1 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Пример 4.5. Решите уравнение $\cos 2x = 2 \cos 6$.

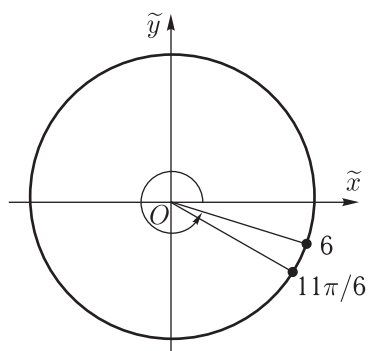


Рис. 4.4

Решение. Здесь $a = 2 \cos 6$. Уравнение будет иметь решение, если $|2 \cos 6| \leq 1$. Справедливы неравенства $\frac{11}{6}\pi < 6 < 2\pi$ (рис. 4.4). На интервале $\left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$, которому принадлежат точки $\frac{11}{6}\pi$ и 6, функция $\cos x$ является монотонно возрастающей, и потому

$$\cos 6 > \cos \frac{11}{6}\pi = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда имеем $2 \cos 6 > 2 \cos \frac{11}{6}\pi = \sqrt{3} > 1$, и потому уравнение $\cos 2x = 2 \cos 6$ не имеет решения.

Ответ: $\emptyset$ (уравнение не имеет решения).

Замечание. Уравнения $\sin x = \sin \alpha$, $\cos x = \cos \alpha$, а следовательно, и уравнения $\sin kx = \sin mx$, $\cos kx = \cos mx$ имеют решение для всех $\alpha \in \mathbb{R}$. При этом

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = (-1)^n \alpha + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi - \alpha + 2\pi m, & m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \pm \alpha + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.5)$$

Уравнение $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$ имеет решение для всех $\alpha \in \mathbb{R}$, за исключением $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.6)$$

Решим таким способом уравнение $\sin 3x = \sin x$:

$$\begin{aligned} \sin 3x = \sin x &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ 3x = \pi - x + 2\pi m, & m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, & m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

В процессе решения тригонометрических уравнений часто получаются уравнения вида $\sin^2 x = a$, $\cos^2 x = a$, где $a \in \left\{\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right\}$, или $\operatorname{tg}^2 x = a$, где $a \in \left\{\frac{1}{3}; 1; 3\right\}$. Для этих уравнений наряду со стандартной формой записи решения возможна также компактная и легко интерпретируемая форма.

Следующий пример иллюстрирует это замечание.

Пример 4.6. Решите уравнения:

а) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$; б) $\sin^2 x = \frac{3}{4}$.

Решение. а) *Способ 1* основан на применении формул понижения степени:

$$\begin{aligned} \sin^2 x = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Способ 2.

$$\begin{aligned} \sin^2 x = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^{m+1} \frac{\pi}{4} + \pi m, & m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

б) *Способ 1.*

$$\begin{aligned} \sin^2 x = \frac{3}{4} &\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Способ 2.

$$\begin{aligned} \sin^2 x = \frac{3}{4} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^{m+1} \frac{\pi}{3} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{2}{3}\pi + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{2}{3}\pi + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

На рис. 4.5 иллюстрируется пример 4.6, б).

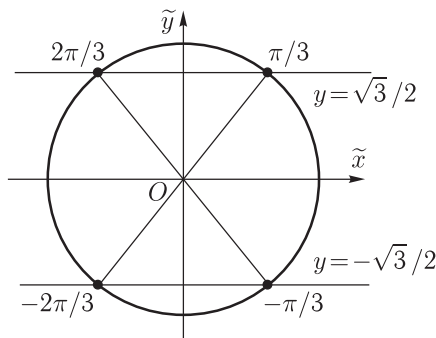


Рис. 4.5

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$; б) $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Замечание. В рассмотренном примере решение уравнений способом 1 рациональнее, чем способом 2.

4.2. Метод введения вспомогательного угла (решение уравнений вида $a \sin x + b \cos x = c$)

Если $b = 0, a \neq 0$, то получаем простейшее тригонометрическое уравнение $\sin x = \frac{c}{a}$. Аналогично, если $a = 0, b \neq 0$, то имеем уравнение $\cos x = \frac{c}{b}$.

При $c = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ исходное уравнение приводится к простейшему уравнению $\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$.

Пусть $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2} > 0$ (равносильное преобразование уравнения):

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (4.7)$$

Поскольку

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1,$$

то можно положить $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha$, $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha$, т.е. ввести вспомогательный угол α .

Уравнение (4.7) примет вид

$$\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

или

$$\sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (4.8)$$

Замечание. Положив

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \beta, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \beta,$$

получим уравнение

$$\cos(x - \beta) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (4.9)$$

также равносильное уравнению (4.7).

Уравнение (4.8) или (4.9) имеет решения тогда и только тогда, когда

$$\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2.$$

В этом случае уравнения (4.8) и (4.9) имеют соответственно решения

$$x = -\alpha + (-1)^n \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \beta \pm \arccos \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Каждое из этих решений является также решением уравнения (4.7) и соответственно уравнения

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

Пример 4.7. Решите уравнение

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}.$$

Решение. Разделив обе части уравнения на $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$, получим уравнение $\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Приняв $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, т. е. $\alpha = \frac{\pi}{3}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{3} \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cos x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Аналогично решаются уравнения вида

$$a \sin f(x) + b \cos f(x) = c.$$

Пример 4.8. Решите уравнение

$$2 \sin(3x - \pi) + 5 \cos(3x - \pi) = 5.$$

Решение. Так как $2^2 + 5^2 > 5^2$, то уравнение имеет решение, которое может быть найдено описанным методом. Заметим, что:

$$\sin(3x - \pi) = -\sin(\pi - 3x) = -\sin 3x;$$

$$\cos(3x - \pi) = \cos(\pi - 3x) = -\cos 3x,$$

поэтому

$$\begin{aligned} 2 \sin(3x - \pi) + 5 \cos(3x - \pi) &= 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \sin 3x + 5 \cos 3x = -5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{29}} \sin 3x + \frac{5}{\sqrt{29}} \cos 3x = -\frac{5}{\sqrt{29}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos \alpha \sin 3x + \sin \alpha \cos 3x = -\frac{5}{\sqrt{29}}, \end{aligned}$$

где $\alpha = \arccos \frac{2}{\sqrt{29}} = \arcsin \frac{5}{\sqrt{29}}$.

Далее имеем

$$\begin{aligned}\sin(3x + \alpha) &= -\frac{5}{\sqrt{29}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x + \alpha = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{5}{\sqrt{29}} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \left(-\arcsin \frac{5}{\sqrt{29}} + (-1)^{n+1} \arcsin \frac{5}{\sqrt{29}} + \pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}. \\ \text{Ответ: } x &= \frac{1}{3} \left[[(-1)^{n+1} - 1] \arcsin \frac{5}{\sqrt{29}} + \pi n \right], \quad n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Пример 4.9. Найдите множество значений, принимаемых функцией $f(x) = 4 \sin(5x - 3) - 7 \cos(5x - 3)$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{4^2 + 7^2} \left(\frac{4}{\sqrt{65}} \sin(5x - 3) - \frac{7}{\sqrt{65}} \cos(5x - 3) \right) = \\ &= \sqrt{65} \sin(5x - 3 + \alpha),\end{aligned}$$

где $\alpha = -\arcsin \frac{7}{\sqrt{65}}$. Поскольку $|\sin(5x - 3 + \alpha)| \leq 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$, то $-\sqrt{65} \leq \sqrt{65} \sin(5x - 3 + \alpha) \leq \sqrt{65}$.

Ответ: $[-\sqrt{65}; \sqrt{65}]$.

Пример 4.10. Найдите множество значений функции

$$y(x) = 12 \sin \left(\frac{\pi x}{3} - \frac{1}{2} \right) + 10 \sin^2 \frac{2\pi x - 3}{12}.$$

Решение. Воспользовавшись формулой понижения степени (2.18), получим

$$y(x) = 12 \sin \left(\frac{\pi x}{3} - \frac{1}{2} \right) + 5 \left(1 - \cos \frac{2\pi x - 3}{6} \right),$$

или

$$\begin{aligned}y(x) &= 12 \sin \left(\frac{\pi x}{3} - \frac{1}{2} \right) - 5 \cos \left(\frac{\pi x}{3} - \frac{1}{2} \right) + 5 = \\ &= 13 \left[\frac{12}{13} \sin \left(\frac{\pi x}{3} - \frac{1}{2} \right) - \frac{5}{13} \cos \left(\frac{\pi x}{3} - \frac{1}{2} \right) \right] + 5 = \\ &= 13 \sin \left(\frac{\pi x}{3} - \frac{1}{2} - \alpha \right) + 5,\end{aligned}$$

где $\alpha = \arccos \frac{12}{13}$. Отсюда имеем $5 - 13 \leq y(x) \leq 5 + 13$.

Ответ: $[-8; 18]$.

4.3. Уравнения относительно одной тригонометрической функции

Это уравнения вида $f(t) = 0$, где $t = \sin \varphi(x)$ или $t = \cos \varphi(x)$, или $t = \operatorname{tg} \varphi(x)$, а $\varphi(x)$ — заданная функция.

Пример 4.11. Решите уравнение

$$10 \sin^2 2x + 7 \cos 2x - 4 = 0.$$

Решение. Имеем уравнение $f(\sin 2x, \cos 2x) = 0$. Заменяя $\sin^2 2x$ на $1 - \cos^2 2x$, получим уравнение вида $\tilde{f}(\cos 2x) = 0$:

$$\begin{aligned} 10 \sin^2 2x + 7 \cos 2x - 4 = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 10(1 - \cos^2 2x) + 7 \cos 2x - 4 = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 10 \cos^2 2x - 7 \cos 2x - 6 = 0. \end{aligned}$$

Обозначив $t = \cos 2x$, $-1 \leq t \leq 1$, получим квадратное уравнение

$$10t^2 - 7t - 6 = 0.$$

Его корни: $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = \frac{6}{5}$. Подходит только t_1 .

Тогда

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4.12. Решите уравнение $\cos 2x - \sin x = 0$.

Решение. Поскольку $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$, то исходное уравнение равносильно следующему:

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Решив квадратное уравнение $2t^2 + t - 1 = 0$ относительно переменной $t = \sin x$, получим простейшие уравнения $\sin x = -1$ и $\sin x = \frac{1}{2}$. Их решения соответственно следующие:

$$x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$.

Замечание 1. Уравнение $\cos 2x - \sin x = 0$ можно решить еще одним способом, если воспользоваться формулой разно-

сти косинусов или разности синусов. Например, учитывая, что $\cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$, имеем

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \sin x = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{\pi}{4} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \end{aligned}$$

откуда $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и $x_2 = \frac{3}{2}\pi + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что все корни второй серии содержатся среди корней первой серии. Действительно, при $n = 2 + 3k$, $k \in \mathbb{Z}$, имеем

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi(2 + 3k) = \frac{3}{2}\pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Замечание 2. Формула (4.4) позволяет еще существеннее упростить решение:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin x &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2x = x + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{2} - 2x = \pi - x + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

4.4. Однородные и приводящиеся к однородным уравнения

4.4.1. Однородные уравнения

Определение 4.1. Однородным тригонометрическим уравнением степени k (порядка k) называется уравнение

$$\begin{aligned} a_0 \sin^k x + a_1 \sin^{k-1} x \cos x + \dots + a_{k-1} \sin x \cos^{k-1} x + \\ + a_k \cos^k x = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Простейшим однородным уравнением является уравнение первой степени

$$a_0 \sin x + a_1 \cos x = 0.$$

Делением на $a_0 \cos x$ оно сводится к равносильному уравнению ($a_0 \neq 0$):

$$\operatorname{tg} x = -\frac{a_1}{a_0}.$$

При $k = 2$ и $k = 3$ в (4.10) получаем однородные уравнения соответственно второй и третьей степеней:

$$a_0 \sin^2 x + a_1 \sin x \cos x + a_2 \cos^2 x = 0; \quad (4.11)$$

$$a_0 \sin^3 x + a_1 \sin^2 x \cos x + a_2 \sin x \cos^2 x + a_3 \cos^3 x = 0. \quad (4.12)$$

На вступительных экзаменах, как правило, предлагаются однородные уравнения второй или третьей степени и очень редко — более высокой.

Различают два типа однородных уравнений:

- 1) коэффициенты a_0 и a_k отличны от нуля;
- 2) $a_0 = 0$ и (или) $a_k = 0$.

В случае 1), разделив обе части уравнения на $\cos^k x$, получим алгебраическое уравнение k -й степени относительно переменной $t = \operatorname{tg} x$:

$$a_0 t^k + a_1 t^{k-1} + \dots + a_{k-1} t + a_k = 0.$$

В частности, при $k = 2$ и при $k = 3$ будем иметь уравнения:

$$a_0 t^2 + a_1 t + a_2 = 0;$$

$$a_0 t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3 = 0.$$

Во случае 2) уравнение (4.10) равносильно совокупности двух уравнений. Например, при $a_0 = 0$:

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ a_1 \sin^{k-1} x + a_2 \sin^{k-2} x \cos x + \dots + a_k \cos^{k-1} x = 0; \end{cases}$$

при $a_0 = 0$ и $a_k = 0$:

$$\begin{cases} \sin 2x = 0, \\ a_1 \sin^{k-2} x + a_2 \sin^{k-3} x \cos x + \dots + a_{k-1} \cos^{k-2} x = 0. \end{cases}$$

В каждой из этих совокупностей первое уравнение является простейшим тригонометрическим уравнением, а второе — однородным уравнением первого типа.

Отметим, что аналогично решаются однородные уравнения относительно переменных $u = \sin \varphi(x)$, $v = \cos \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — некоторая заданная функция, т. е. уравнение

$$a_0 \sin^k \varphi(x) + a_1 \sin^{k-1} \varphi(x) \cos \varphi(x) + \dots + a_k \cos^k \varphi(x) = 0.$$

Пример 4.13. Решите уравнение

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0.$$

Решение. Это уравнение является однородным уравнением второй степени (4.11) первого типа ($a_0 = 2$, $a_2 = 1$). Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим уравнение [имеющее те же решения, поскольку если $\cos x = 0$, то x не является решением уравнения (почему?)]

$$2 \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 1 = 0.$$

Обозначив $t = \operatorname{tg} x$, получим квадратное уравнение

$$2t^2 - 3t + 1 = 0.$$

Его корни: $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = 1$. Решив простейшие уравнения $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} x = 1$, будем иметь окончательно:

$$x_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$

Пример 4.14. Решите уравнение

$$\sin^3 x + (1 - \sqrt{3}) \sin^2 x \cos x - \sqrt{3} \sin x \cos^2 x = 0.$$

Решение. Имеем однородное уравнение третьей степени (4.12) второго типа (коэффициент $a_3 = 0$). Оно равносильно совокупности

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0. \end{cases}$$

Корни первого уравнения $x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$. Второе уравнение является однородным второй степени первого типа ($a_0 \neq 0$ и $a_2 \neq$

$\neq 0$). Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$ и приняв $t = \operatorname{tg} x$, получим квадратное уравнение

$$t^2 + (1 - \sqrt{3})t - \sqrt{3} = 0.$$

Его корни: $t_1 = -1$, $t_2 = \sqrt{3}$. Этим корням отвечают простейшие уравнения $\operatorname{tg} x = -1$ и $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$. Их решения:

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{3} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x_1 = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}; \quad x_3 = \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Пример 4.15. Решите уравнение

$$2\sqrt{3} - (\sqrt{3} + 1) \sin 2x - 2(\sqrt{3} - 1) \cos^2 x = 0.$$

Решение. Данное уравнение не является однородным. Однако $2\sqrt{3} \equiv 2\sqrt{3}(\cos^2 x + \sin^2 x)$, поэтому уравнение можно переписать в равносильной форме:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3} \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin^2 x - (\sqrt{3} + 1) \sin 2x - \\ - 2\sqrt{3} \cos^2 x + 2 \cos^2 x = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \sin^2 x - 2(\sqrt{3} + 1) \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^2 x - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \sin x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos^2 x = 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение является однородным уравнением второй степени с коэффициентами $a_0 = 1$, $a_1 = -\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $a_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$, получим $\operatorname{tg}^2 x - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \operatorname{tg} x + \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$. Квадратное уравнение относительно переменной $t = \operatorname{tg} x$ имеет корни $t_1 = 1$ и $t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, откуда

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Пример 4.16. Решите уравнение

$$4 \sin^3 x + 8 \cos x \sin^2 x - \cos 3x - 3 \cos x = 0.$$

Решение. Поскольку $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$, то уравнение примет вид

$$\sin^3 x + 2 \cos x \sin^2 x - \cos^3 x = 0.$$

Это однородное уравнение третьей степени первого типа. Разделив обе части уравнения на $\cos^3 x$ ($\cos x \neq 0$), получим уравнение

$$\operatorname{tg}^3 x + 2 \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0,$$

или

$$t^3 + 2t^2 - 1 = 0, \text{ где } t = \operatorname{tg} x.$$

Один корень уравнения $t = -1$ легко обнаруживается. Осуществив деление многочлена $t^3 + 2t^2 - 1$ на двучлен $t + 1$, будем иметь

$$t^3 + 2t^2 - 1 = (t + 1)(t^2 + t - 1).$$

Отсюда

$$t^3 + 2t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t + 1 = 0, \\ t^2 + t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -1, \\ t_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Возвращаясь к старым переменным, получаем простейшие уравнения

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = -1, \\ \operatorname{tg} x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \\ \operatorname{tg} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\operatorname{arctg} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ x = \operatorname{arctg} \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; x_2 = -\operatorname{arctg} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}; x_3 = \operatorname{arctg} \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Замечание. В некоторых случаях уравнение приводится к однородному, но одновременно возможны и альтернативные, более простые способы решения. Естественно, целесообразно использовать более простые способы решения.

Пример 4.17. Решите уравнение

$$\cos 3x + 2 \cos x \sin^2 x = 0.$$

Решение. *Способ 1.* Воспользовавшись формулами

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x; \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x,$$

получим уравнение

$$\begin{aligned} 4 \cos^3 x - 3 \cos x + 2 \cos x(1 - \cos^2 x) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \cos^3 x - \cos x &= 0 \Leftrightarrow \cos x(2 \cos^2 x - 1) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $2 \cos^2 x - 1 = \cos 2x$, то окончательно имеем уравнение

$$\cos x \cdot \cos 2x = 0,$$

равносильное исходному.

Имеем далее

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} m, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Способ 2. Уравнение $\cos 3x + 2 \cos x \sin^2 x = 0$ равносильно однородному

$$\cos^3 x - \cos x \sin^2 x = 0.$$

В соответствии с общей схемой решения однородных уравнений приходим к совокупности уравнений

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \operatorname{tg} x = \pm 1, \end{cases}$$

решение которой, естественно, совпадает с полученным выше, т. е. получается

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x_{2,3} = \pm \frac{\pi}{4} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Решение тригонометрических уравнений целесообразно сопровождать нанесением корней, принадлежащих каждой серии уравнения, на тригонометрическую окружность. В данном случае имеем рис. 4.6.

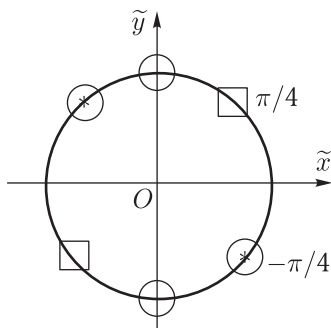


Рис. 4.6

4.4.2. Уравнения, приводящиеся к однородным

К однородным приводятся уравнения $f(\sin x, \cos x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, где $f(\sin x, \cos x)$ — однородная функция вида (4.10) степени $2k$. Заменяя

$$\begin{aligned} c &= c(\cos^2 x + \sin^2 x)^k = \\ &= c(\cos^{2k} x + k \cos^{2(k-1)} x \sin^2 x + \dots + k \cos^2 x \sin^{2(k-1)} x + \sin^{2k} x) \end{aligned}$$

и выполнив приведение подобных членов в уравнении

$$f(\sin x, \cos x) = c(\cos^{2k} x + k \cos^{2(k-1)} x \sin^2 x + \dots + \sin^{2k} x),$$

получим однородное уравнение степени $2k$.

В некоторых случаях неоднородная функция $f(x)$ приводится к однородной умножением отдельной группы слагаемых на выражение

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)^m \equiv 1.$$

Пример 4.18. Решите уравнение

$$\cos^4 x + \sin^4 x + 5 \sin^3 x \cos x - \cos^2 x \sin^2 x - 2 \sin x \cos^3 x = 1.$$

Решение. Левая часть уравнения — однородная функция четвертой степени. Заменяя единицу в левой части выражением $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 \equiv 1$, получим

$$\begin{aligned} \cos^4 x + \sin^4 x + 5 \sin^3 x \cos x - \cos^2 x \sin^2 x - 2 \sin x \cos^3 x &= \\ &= \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos x \sin x (5 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0, \\ 5 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Корни первого уравнения: $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Второе уравнение является однородным уравнением второй степени. Разделив на $\cos^2 x$ ($\cos x \neq 0$), получим уравнение

$$5 \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

Положим $t = \operatorname{tg} x$, $t \in \mathbb{R}$, и решим уравнение

$$5t^2 - 3t - 2 = 0.$$

Его корни: $t_1 = -\frac{2}{5}$; $t_2 = 1$. Отсюда

$$\operatorname{tg} x = -\frac{2}{5} \Rightarrow x = -\operatorname{arctg} \frac{2}{5} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{2}n$; $n \in \mathbb{Z}$; $x_2 = -\operatorname{arctg} \frac{2}{5} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; $x_3 = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 4.19. Решите уравнение

$$3 \sin^2 x - \sin 2x + 2 \cos^4 x + 4 \sin^4 x = 2.$$

Решение. В данном случае левая часть уравнения не является однородной функцией, а в правой части стоит число, отличное от нуля. Преобразуем уравнение следующим образом.

Выражение $3 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x$ умножим на $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$, а в правой части $2 = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)^2$. Получим

$$\begin{aligned} 3 \sin^4 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x - 2 \sin^3 x \cos x - \\ - 2 \sin x \cos^3 x + 2 \cos^4 x + 4 \sin^4 x = \\ = 2 \sin^4 x + 4 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \cos^4 x, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 5 \sin^4 x - 2 \sin^3 x \cos x - \sin^2 x \cos^2 x - 2 \sin x \cos^3 x &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ 5 \sin^3 x - 2 \sin^2 x \cos x - 2 \sin x \cos^2 x - 2 \cos^3 x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Корни первого уравнения: $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Второе уравнение является однородным уравнением третьей степени и сводится к уравнению

$$5t^3 - 2t^2 - t - 2 = 0,$$

где $t = \operatorname{tg} x$.

Перегруппировав слагаемые в последнем уравнении, будем иметь

$$(5t^3 - 5t^2) + (3t^2 - 3t) + (2t - 2) = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(5t^2 + 3t + 2) = 0.$$

Это уравнение имеет единственный корень $t = 1$, т. е. $\operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x_1 = \pi n, n \in \mathbb{Z}; x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$.

4.5. Решение уравнений вида $R(\sin^{2n} x, \cos^{2k} x) = 0$

Рациональные уравнения, переменными в которых выступают $u = \sin^{2n} x$ и $v = \cos^{2k} x$ — тригонометрические функции в четных степенях, — могут решаться различными способами. Рассмотрим три основных способа.

Способ 1 — использование формул понижения степени:

$$\begin{aligned} R(\sin^{2n} x, \cos^{2k} x) &= \left| \begin{array}{l} \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \end{array} \right| = \\ &= R\left(\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^n, \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^k\right) = \tilde{R}(\cos 2x). \end{aligned}$$

Здесь $R(\cdot)$ — рациональная функция двух переменных $u = \sin^{2n} x$ и $v = \cos^{2k} x$, $\tilde{R}(\cdot)$ — рациональная функция одной переменной $t = \cos 2x$.

Способ 2 — замена переменной $t = \sin^2 x$ или $t = \cos^2 x$:

$$R(\sin^{2n} x, \cos^{2k} x) = |\sin^2 x = t| = R(t^n, (1 - t)^k) = \tilde{R}(t).$$

Способ 3 — метод тождественных преобразований.

Суть метода заключается в упрощении исходного уравнения в результате равносильных преобразований с помощью тригонометрических формул.

Пример 4.20. Решите уравнение

$$\cos^4 x + \sin^4 x - \cos 2x - \frac{1}{2} = 0. \quad (4.13)$$

Решение. Способ 1. Воспользовавшись формулами

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

получим

$$\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 - \cos 2x - \frac{1}{2} = 0$$

или

$$\cos^2 2x - 2 \cos 2x = 0, \quad (4.14)$$

откуда имеем

$$\begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \cos 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Способ 2. Обозначив $\cos^2 x = t$, $0 \leq t \leq 1$, получим с учетом того, что $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2t - 1$,

$$t^2 + (1 - t)^2 - (2t - 1) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 4t + \frac{3}{2} = 0.$$

Корни последнего уравнения:

$$t_1 = \frac{1}{2}, \quad t_2 = \frac{3}{2}.$$

Условию $0 \leq t \leq 1$ удовлетворяет только первый корень. Таким образом,

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

(рис. 4.7).

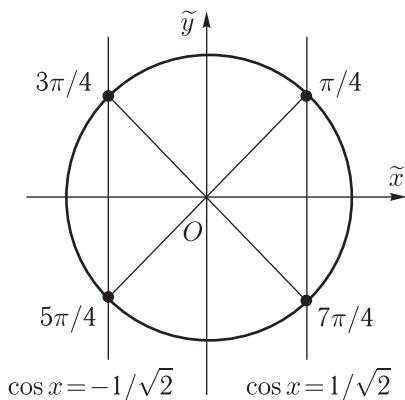


Рис. 4.7

Способ 3. В соответствии с формулой (2.37) имеем

$$\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2} (1 - \cos^2 2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2x.$$

Подставив в (4.13), получаем равносильное уравнение

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2x - \cos 2x - \frac{1}{2} = 0, \quad \text{или} \quad \cos^2 2x - 2 \cos 2x = 0.$$

А это — уравнение (4.14), полученное при решении исходного уравнения способом 1.

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4.21. Найдите множества значений функций:

а) $y = \cos^4 x + \sin^4 x$; б) $y = \cos^6 x + \sin^6 x$; в) $y = \cos^8 x + \sin^8 x$.

Решение. а) Воспользуемся формулой (2.37), в соответствии с которой

$$y \equiv \cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x.$$

Поскольку $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$, то

$$1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \leq \cos^4 x + \sin^4 x \leq 1 - \frac{1}{2} \cdot 0, \quad \text{т. е. } y \in \left[\frac{1}{2}; 1\right];$$

б) в соответствии с формулой (2.38)

$$y \equiv \cos^6 x + \sin^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x,$$

откуда следует, что $y \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$;

в) в соответствии с формулой (2.46)

$$y(x) \equiv \cos^8 x + \sin^8 x = \frac{1}{8} \sin^4 2x - \sin^2 2x + 1.$$

Обозначив $\sin^2 2x = t$, $0 \leq t \leq 1$, получим функцию $f(t) = \frac{1}{8}t^2 - t + 1$, область значений $E(f)$ которой при $t \in [0; 1]$ совпадает с областью $E(y)$ значений функции $y(x)$.

Функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и потому в соответствии с теоремой Вейерштрасса достигает своих наибольшего $f_{\text{наиб}}$ и наименьшего $f_{\text{наим}}$ значений на отрезке $[0; 1]$. При этом $E(f) = [f_{\text{наим}}; f_{\text{наиб}}]$.

Таким образом, задача нахождения множества значений *непрерывной на отрезке функции эквивалентна* нахождению *наибольшего и наименьшего значений* этой функции на заданном отрезке.

Для решения этой задачи:

1) находим значения функции f на концах отрезка

$$f(0) = 1, \quad f(1) = \frac{1}{8};$$

2) находим критические точки:

$$f'(t) = \frac{1}{4}t - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 4.$$

3) для критических точек, принадлежащих заданному отрезку, сравниваем значения функции в этих точках и на концах отрезка. В данном случае стационарная точка $t_0 = 4$ не принадлежит интервалу $(0; 1)$, и потому $E_y = \left[\frac{1}{8}; 1\right]$.

Ответ: а) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; б) $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$; в) $\left[\frac{1}{8}; 1\right]$.

Полученные в данном примере результаты позволяют предположить, что $E(\cos^{2n} x + \sin^{2n} x) = \left[\frac{1}{2^{n-1}}; 1\right]$.

Докажем это предположение.

Пусть $y = \cos^{2n} x + \sin^{2n} x$. Обозначим $\cos^2 x = t$, $t \in [0; 1]$, и рассмотрим функцию $f(t) = t^n + (1-t)^n$ на отрезке $[0, 1]$. Как было отмечено выше, нахождение множества значений непрерывной на отрезке функции эквивалентно решению задачи: найти

$$\max_{t \in [0, 1]} f(t) \quad \text{и} \quad \min_{t \in [0, 1]} f(t).$$

Имеем:

$$1) f(0) = 1, f(1) = 1;$$

$$2) f'(t) = nt^{n-1} - n(1-t)^{n-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{1}{2}.$$

Стационарная точка $t_0 = \frac{1}{2} \in (0; 1)$ и потому вычисляем

$$f(t_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1};$$

$$3) \quad \max_{t \in [0, 1]} f(t) = \max \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, 1 \right\} = 1; \quad \min_{t \in [0, 1]} f(t) = \\ = \min \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, 1 \right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Таким образом, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq \cos^{2n} x + \sin^{2n} x \leq 1$. ■

Пример 4.22. Решите уравнения:

а) $\cos^{2n} x + \sin^{2k} x = 1$; б) $\cos^{2n} x + \sin^{2k-1} x = 1$.

Решение. а) *Способ 1.*

$$\begin{aligned} \cos^{2n} x + \sin^{2k} x = 1 &\Leftrightarrow \cos^{2n} x + \sin^{2k} x = \cos^2 x + \sin^2 x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos^2 x (\cos^{2(n-1)} x - 1) + \sin^2 x (\sin^{2(k-1)} x - 1) = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Поскольку $\cos^{2(n-1)} x - 1 \leq 0$ и $\sin^{2(k-1)} x - 1 \leq 0$, то уравнение (4.15) равносильно каждой из систем:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \cos^2 x (\cos^{2(n-1)} x - 1) = 0, \\ \sin^2 x (\sin^{2(k-1)} x - 1) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin^{2(k-1)} x = 1, \\ \sin x = 0, \\ \cos^{2(n-1)} x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = \pm 1, \\ \sin x = 0, \\ \cos x = \pm 1. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Способ 2. Легко видеть, что значения x , при которых $\cos x = \pm 1$ или $\sin x = \pm 1$, т. е. $x = \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$, являются решениями уравнения.

Покажем, что других решений уравнение не имеет. Если $x \neq \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$, то $|\cos x| < 1$ и $|\sin x| < 1$. Поэтому

$$\begin{cases} \cos^{2n} x < \cos^2 x; \\ \sin^{2k} x < \sin^2 x \end{cases} \quad (4.16)$$

при $n \geq 2$ и $k \geq 2$. Сложив неравенства (4.16), получим $\cos^{2n} x + \sin^{2k} x < \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, т. е. для всех $x \neq \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$, имеем $\cos^{2n} x + \sin^{2k} x < 1$, и потому уравнение а) других решений, кроме $x = \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$, не имеет.

б) Решите самостоятельно обоими способами.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$;

б) $x_1 = \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

4.6. Решение уравнений вида $R(\sin x \pm \cos x, \sin 2x) = 0$

Положим $t = \sin x + \cos x$. Тогда

$$t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1.$$

В результате уравнение $R(\sin x + \cos x, \sin 2x) = 0$ сводится к рациональному уравнению относительно переменной t

$$R(t, t^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \tilde{R}(t) = 0,$$

где $\tilde{R}(\cdot)$ — рациональная функция переменной t .

Пример 4.23. Решите уравнение

$$\cos^3 x + \sin^3 x = \sin 2x + 1.$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} \cos^3 x + \sin^3 x &= (\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \cos x \sin x + \sin^2 x) = \\ &= (\cos x + \sin x)(1 - \cos x \sin x) = (\cos x + \sin x) \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right). \end{aligned}$$

В результате исходное уравнение равносильно следующему:

$$(\cos x + \sin x) \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right) - \sin 2x - 1 = 0.$$

Пусть $\cos x + \sin x = t$, соответственно $\sin 2x = t^2 - 1$, и тогда последнее уравнение примет вид

$$t \left(1 - \frac{1}{2}(t^2 - 1)\right) - (t^2 - 1) - 1 = 0,$$

или $t(t+3)(t-1) = 0 \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = -3, t_3 = 1$.

Получили, что исходное уравнение равносильно совокупности однотипных уравнений

$$\begin{cases} \cos x + \sin x = 0, \\ \cos x + \sin x = 1, \\ \cos x + \sin x = -3. \end{cases}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \cos x + \sin x &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin x = \\ &= 2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - x + x}{2} \cdot \cos \frac{\frac{\pi}{2} - x - x}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right), \end{aligned}$$

то последняя совокупность уравнений равносильна уравнениям:

$$\begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ \emptyset \text{ (так как } \frac{3}{\sqrt{2}} > 1). \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = \frac{3}{4}\pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}; x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}; x_3 = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Пример 4.24. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x} = 3.$$

Решение. Область допустимых значений переменной x определяется условиями

$$\begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0, \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Исходное уравнение равносильно следующему:

$$\cos x - \sin x - 3 \cos x \sin x + 1 = 0.$$

Пусть $\cos x - \sin x = t$, тогда

$$(\cos x - \sin x)^2 = t^2 \Leftrightarrow 1 - 2 \sin x \cos x = t^2 \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2}.$$

В результате имеем уравнение

$$t - \frac{3}{2}(1 - t^2) + 1 = 0 \Leftrightarrow 3t^2 + 2t - 1 = 0.$$

Его корни: $t_1 = -1, t_2 = \frac{1}{3}.$

Уравнение $\cos x - \sin x = -1$ имеет две серии корней:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{и} \quad x_2 = -\pi + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Однако обе серии корней не принадлежат ОДЗ уравнения.

Уравнение $\cos x - \sin x = \frac{1}{3}$ решим методом введения вспомогательного угла:

$$\begin{aligned}\cos x - \sin x = \frac{1}{3} &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{6} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Ответ: $x_{1,2} = -\frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

4.7. Решение уравнений с использованием основных тригонометрических формул

Тригонометрические тождества, позволяющие преобразовывать сумму (разность) тригонометрических функций в произведение [формулы (2.27)–(2.31)] либо произведения $\sin kx \cos mx$, $\sin kx \sin mx$, $\cos kx \cos mx$ в алгебраические суммы основных тригонометрических функций [формулы (2.24)–(2.26)], являются эффективным средством решения многих тригонометрических уравнений.

Решение некоторых уравнений осуществляется с помощью домножения обеих частей уравнения на некоторое выражение с последующим применением названных и других формул из раздела 2.

Пример 4.25. Решите уравнение

$$\cos 5x + \sin x = \cos x - \sin 3x.$$

Решение. Преобразуем уравнение к виду

$$(\cos 5x - \cos x) + (\sin x + \sin 3x) = 0$$

и применим к выражениям в скобках формулы разности косинусов и суммы синусов:

$$-2 \sin 3x \sin 2x + 2 \sin 2x \cos x = 0,$$

или

$$\sin 2x(\cos x - \sin 3x) = 0,$$

откуда

$$\begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \cos x - \sin 3x = 0. \end{cases}$$

Корни первого уравнения: $x = \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Второе уравнение решим с помощью формулы (4.4). Поскольку $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, то

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin 3x &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = 3x + 2\pi m, & m \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{2} - x = \pi - 3x + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}m, & m \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}; x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}m, m \in \mathbb{Z}; x_3 = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 4.26. Решите уравнение

$$\cos \frac{x}{2} \cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{16}.$$

Решение. Умножим обе части на $16 \sin \frac{x}{2}$. Получим уравнение

$$16 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x \cos 2x \cos 4x = \sin \frac{x}{2},$$

равносильное исходному на множестве $X = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$. Действительно, корни $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, уравнения $\sin \frac{x}{2} = 0$ не являются корнями исходного уравнения и потому должны быть исключены из множества решений полученного уравнения.

Учитывая, что

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} &= \sin x, & 2 \sin x \cos x &= \sin 2x, \\ 2 \sin 2x \cos 2x &= \sin 4x, & 2 \sin 4x \cos 4x &= \sin 8x, \end{aligned}$$

получаем уравнение $\sin 8x - \sin \frac{x}{2} = 0$, или $\sin 8x = \sin \frac{x}{2}$. Отсюда в соответствии с (4.4) получаем

$$\begin{cases} 8x = \frac{x}{2} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ 8x = \pi - \frac{x}{2} + 2\pi m, & m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{15}\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{2}{17}\pi + \frac{4}{17}\pi m, & m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Исключим посторонние корни $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, из полученных серий. Для этого решим уравнения $\frac{4}{15}\pi n = 2\pi k$ и $\frac{2}{17}\pi + \frac{4}{17}\pi m =$

$= 2\pi k$ на множестве целых чисел n, m, k . Первое уравнение имеет решение $n = \frac{15}{2}k$; для целочисленности n необходимо и достаточно, чтобы k было четным, поэтому мы можем записать $n = 15k$. Отсюда следует, что для первой серии корней $x = \frac{4}{15}\pi n, n \in \mathbb{Z}$, но $n \neq 15k, k \in \mathbb{Z}$. Рассуждая аналогично, получаем, что второе уравнение имеет целочисленные решения вида $m = 17r + 8, k = 2r + 1, r \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x_1 = \frac{4}{15}\pi n, n \in \mathbb{Z}; n \neq 15k; x_2 = \frac{2}{17}\pi + \frac{4}{17}\pi m, m \neq 17k + 8, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 4.27. Решите уравнение

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(2x + \frac{5}{8}\pi\right) + \cos\left(5x + \frac{3}{4}\pi\right) \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Решение. Преобразуем каждое слагаемое данного уравнения из произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\begin{aligned} \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(2x + \frac{5}{8}\pi\right) &= \frac{1}{2} \left[\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-x - \frac{3}{4}\pi\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos 3x - \sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) \right]; \\ \cos\left(5x + \frac{3}{4}\pi\right) \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{2} \left[\cos\left(7x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(3x + \pi) \right] = \\ &= -\frac{1}{2}(\sin 7x + \cos 3x). \end{aligned}$$

В результате уравнение примет вид

$$\sin 7x + \sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) = 0.$$

Преобразовав сумму в произведение, получим равносильную совокупность уравнений

$$\begin{cases} \sin\left(4x + \frac{3}{8}\pi\right) = 0, \\ \cos\left(3x - \frac{3}{8}\pi\right) = 0, \end{cases}$$

решением которой являются серии корней

$$x_1 = -\frac{3}{32}\pi + \frac{\pi}{4}n, n \in \mathbb{Z}, \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{7}{24}\pi + \frac{\pi}{3}m, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -\frac{3}{32}\pi + \frac{\pi}{4}n, n \in \mathbb{Z}; x_2 = \frac{7}{24}\pi + \frac{\pi}{3}m, m \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4.28. Решите уравнение

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2.$$

Решение. Применив формулы понижения степени

$$\cos^2 kx = \frac{1 + \cos 2kx}{2},$$

получим равносильное уравнение

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0.$$

Преобразовав суммы $(\cos 2x + \cos 8x)$ и $(\cos 4x + \cos 6x)$ в произведения, получим следующее равносильное уравнение

$$\cos 5x \cos 3x + \cos 5x \cos x = 0.$$

Это уравнение еще одним применением формулы суммы косинусов сводится к совокупности уравнений

$$\begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \cos 5x = 0, \\ \cos x = 0. \end{cases}$$

Ее решением являются серии корней:

$$x_1 = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}m, \quad m \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad x_3 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Покажем, что корни третьей серии содержатся в первой. Для этого решим уравнение

$$\frac{\pi}{2} + \pi n = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}m, \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

считая m параметром, а n — зависимой переменной. Получим

$$n = \frac{-2 + m}{5}, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, что при $m = 2 + 5 \cdot \tilde{m}$, $\tilde{m} \in \mathbb{Z}$, получаются целочисленные значения $n = \tilde{m}$ (при $\tilde{m} = 0$: $m = 2$, $n = 0$ и $x_1 = x_2 = \frac{\pi}{2}$;

при $\tilde{m} = 1$: $m = 7$, $n = 1$ и $x_1 = x_2 = \frac{3}{2}\pi$ и т.д.).

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}m, \quad m \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

4.8. Замена переменной $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (универсальная подстановка)

Замена $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ применяется при решении уравнений вида

$$R(\sin x, \cos x) = 0, \quad (4.17)$$

т. е. уравнений, левая часть которых является рациональной функцией двух переменных $u = \cos x$ и $v = \sin x$. Учитывая, что

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

получаем рациональное уравнение $\tilde{R}(t) = 0$ относительно одной переменной t ($R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \equiv \tilde{R}(t) = 0$).

Сделаем два важных замечания по поводу подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Замечание 1. Функция $t(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ не определена в точках $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Однако эти точки могут входить в ОДЗ исходного уравнения (4.17) и, более того, быть корнями этого уравнения. Поэтому при применении подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ необходимо проверять, не удовлетворяют ли значения $x = \pi(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, исходному уравнению.

Замечание 2. Подстановка $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ сводит всякое рациональное уравнение (4.17) к некоторому алгебраическому уравнению степени n . Однако при $n > 2$ решение получающегося алгебраического уравнения может оказаться более сложной задачей, чем решение исходного уравнения неким альтернативным способом. И если альтернативный способ существует, то чаще всего целесообразно пользоваться им.

Пример 4.29. Решите уравнение

$$\sin x + \cos x = 1$$

с помощью универсальной подстановки.

Решение. Отметим, что левая часть уравнения является многочленом *первой* степени относительно переменных $u = \sin x$ и $v = \cos x$, т. е. является рациональной функцией $R(\sin x, \cos x)$.

Используя формулы (4.18), получаем уравнение

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1, \quad (4.19)$$

где $\tilde{R}(t) = \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}$ — рациональная функция относительно переменной t .

Умножив обе части уравнения (4.19) на $1+t^2$, получим алгебраическое уравнение

$$2t + 1 - t^2 = 1 + t^2 \Leftrightarrow t^2 - t = 0$$

второй степени. Его корни: $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$. Возвращаясь к старой переменной x , получаем

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}; x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Уравнения вида $\sin x + \cos x = \pm 1$, $\sin x - \cos x = \pm 1$ часто появляются в процессе решения более сложных уравнений. Решать каждое из них можно с помощью рассмотренной в примере 4.29 универсальной подстановки, методом введения вспомогательного угла, а также с помощью формул преобразования суммы (разности) $\sin x \pm \cos x$ в произведение. Покажем это на примере уравнения $\sin x + \cos x = 1$.

Метод введения вспомогательного угла:

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x = 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1/\sqrt{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

или $x = 2\pi m$ при $n = 2m, m \in \mathbb{Z}$ (при четном n); $x = -\frac{\pi}{2} + \pi(2k+1) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ при $n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$ (при нечетном n);

преобразование суммы в произведение:

$$\begin{aligned}\sin x + \cos x = 1 &\Leftrightarrow \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

$$\text{или } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}; \quad x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Можно заметить, что решениями уравнений

$$\sin x + \cos x = \pm 1, \quad \sin x - \cos x = \pm 1$$

являются только точки вида $x = \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$. Действительно, справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = 1. \end{cases}$

Утверждение 2. $\sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = -1. \end{cases}$

Утверждение 3. $\sin x + \cos x = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1, \\ \cos x = -1. \end{cases}$

Утверждение 4. $\cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1, \\ \cos x = 1. \end{cases}$

Доказываются все утверждения однотипно. Докажем для примера утверждение 2.

Доказательство. Значения $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ ($\sin x = 1$), и $x = \pi + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ ($\cos x = -1$), являются решениями данного уравнения. Покажем, что других решений оно не имеет.

В первой и третьей четвертях ($x \in (0; \frac{\pi}{2})$, $x \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$) имеет место неравенство $|\sin x - \cos x| < 1$, так как $|\sin x| < 1$, $|\cos x| < 1$, а в этих четвертях $\sin x$ и $-\cos x$ имеют разные знаки.

Во второй и четвертой четвертях ($x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$, $x \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$) будет выполняться неравенство $|\sin x - \cos x| > 1$. Действительно, во второй четверти $a = \sin x$ и $b = -\cos x$ — длины катетов прямоугольного треугольника OAB (рис. 4.8) с гипотенузой $c = OA = 1$ и потому в силу неравенства треугольника ($a + b > c$) имеем

$$|\sin x - \cos x| > 1.$$

Для четвертой четверти доказательство аналогично.

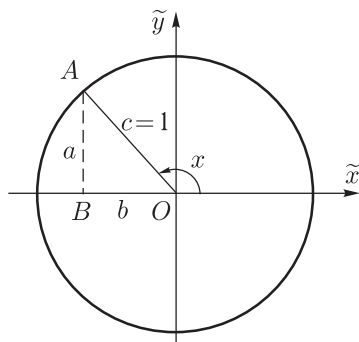


Рис. 4.8

В точках $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ и $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, как нетрудно видеть, $\sin x - \cos x \neq 1$. Таким образом, утверждение 2 доказано. ■

Отметим, что решение уравнений вида (4.17) с помощью замены $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ порождает иногда еще одну проблему — менее удобную форму записи ответа. Так, решение уравнения $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$ (см. пример 4.7) этим методом приводит к квадратному уравнению $t^2 - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})t - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 0$. Его корни: $t_{1,2} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(1 \pm \sqrt{2})$. Отсюда

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(1 \pm \sqrt{2}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 2 \arctg \left((\sqrt{3} - \sqrt{2})(1 \pm \sqrt{2}) \right) + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

что является менее удобной формой представления результата по сравнению с ранее полученной $x = -\frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Можно сделать общий вывод: *нецелесообразно* применять метод замены переменной ($t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$) для решения уравнений вида $a \sin f(x) + b \cos f(x) = c$, которые эффективно решаются методом введения вспомогательного угла. Такой же вывод можно (и нужно!) сделать по отношению ко всем рассмотренным выше классам уравнений, хотя все они могут быть решены методом замены переменной $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Вернемся к уравнению из примера 4.24.

Пример 4.30. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x} = 3.$$

Решение. ОДЗ уравнения: $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$. Используя формулы (4.18), получаем уравнение

$$\frac{1+t^2}{2t} - \frac{1+t^2}{1-t^2} + \frac{(1+t^2)^2}{2t(1-t^2)} = 3, \quad t \neq 0, \quad t \neq \pm 1,$$

или $2t^3 + t^2 - 4t + 1 = 0$, $t \neq 0$, $t \neq \pm 1$.

Один корень этого уравнения $t_1 = 1$ легко находится. Однако он является посторонним. Разделив многочлен $2t^3 + t^2 - 4t + 1 = 0$ на $(t - 1)$ — «уголком» или воспользовавшись схемой Горнера:

	2	1	-4	1
1	2	3	-1	0

— получим квадратное уравнение

$$2t^2 + 3t - 1 = 0.$$

Его корни: $t_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$.

Имеем

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4} \Rightarrow x = 2 \left(\operatorname{arctg} \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4} + \pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = 2 \left(\operatorname{arctg} \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4} + \pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

И вновь этот ответ менее удобен для анализа, чем ответ, полученный в примере 4.24:

$$x = -\frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тем не менее имеются примеры, в которых применение подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ не только целесообразно, но и является более эффективным или, возможно, даже единственным способом решения тригонометрического уравнения.

Пример 4.31. Решите уравнение

$$\frac{\sin x + 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} + \cos x = 1.$$

Решение. ОДЗ уравнения: $\begin{cases} x \neq \pi + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Пусть $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Заметим, что значения $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, не принадлежат ОДЗ и поэтому не могут быть решениями. С учетом формул (4.18) получаем на ОДЗ уравнения:

$$\frac{\frac{2t}{1+t^2} + 1}{t+1} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 - t - 1 = 0, \\ t \neq -1. \end{cases}$$

Корни последнего уравнения $t_1 = 1$ и $t_2 = -\frac{1}{2}$ принадлежат ОДЗ переменной t , так что имеем

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = 2 \left(\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) + \pi m \right), \quad m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_2 = -2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Пример 4.32. Решите уравнение $\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + 1 = \frac{5}{2} \operatorname{tg} x$.

Решение. ОДЗ уравнения:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Непосредственной подстановкой легко убедиться, что значения $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ — корни уравнения.

Далее, поскольку

$$\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1+t}{1-t}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2},$$

то исходное уравнение после подстановки в него этих выражений примет вид

$$\frac{1+t}{1-t} + 1 = \frac{5t}{1-t^2} \Leftrightarrow \frac{2}{1-t} = \frac{5t}{1-t^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 2 = 5t, \\ t \neq \pm 1, \end{cases} \Rightarrow t = \frac{2}{3},$$

т. е.

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 2 \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi m \right), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x_1 = \pi(1 + 2n)$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_2 = 2 \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi m \right)$, $m \in \mathbb{Z}$.

Данный пример подтверждает важность замечания 1 данного подраздела о необходимости проверки значений $x = \pi(1 + 2n)$,

$n \in \mathbb{Z}$, подстановкой в исходное уравнение. В противном случае возможна потеря корней.

4.9. Метод оценок и другие специальные приемы решения тригонометрических уравнений

Идею метода оценок легко понять из следующего примера: решить уравнение

$$1 + \cos 4x = \frac{2}{\sin x}.$$

Для левой части уравнения справедливы оценки $0 \leq 1 + \cos 4x \leq 2$ для всех $x \in \mathbb{R}$; для правой части: $\frac{2}{\sin x} \geq 2$ для всех $x \in \mathbb{R}$, таких, что $\sin x > 0$.

Если $\sin x < 0$, то и $\frac{2}{\sin x} < 0$, а выражение в левой части $(1 + \cos 4x)$ неотрицательно для всех $x \in \mathbb{R}$. Поэтому при $x \in (-\pi + 2k\pi; 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, уравнение не имеет решения.

Отсюда следует, что если решение x^* уравнения существует, то одновременно должны выполняться равенства:

$$\begin{cases} 1 + \cos 4x^* = 2, \\ \frac{2}{\sin x^*} = 2. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что в данном случае такие x^* существуют и $x^* = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 4.33. Решите уравнение

$$1 + \sin 2x = \frac{2}{\cos x}.$$

Решение. Имеем оценки: $0 \leq 1 + \sin 2x \leq 2$ для всех $x \in \mathbb{R}$; $\frac{2}{\cos x} \geq 2$ для всех $x \in \mathbb{R}$, таких, что $\cos x > 0$. Поэтому уравнение имеет решение x^* , если выполняются равенства:

$$\begin{cases} 1 + \sin 2x^* = 2, \\ \frac{2}{\cos x^*} = 2. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $x^* = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Поскольку решения x^* должны удовлетворять еще условию $\cos x^* > 0$, то окончательно имеем: $x^* = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Подставив эти значе-

ния во второе уравнение, получим неверное равенство $2\sqrt{2} = 2$. Это означает, что левая и правая части уравнения принимают значение 2 в разных точках: левая — в точках $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, а правая — в точках $x = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\emptyset$ (уравнение не имеет решения).

Пример 4.34. Решите уравнение

$$(2 + \cos 2x)(3 - \sin y) = 12 \sec^2 3z.$$

Решение. В соответствии с определением функции $\sec$ имеем $\sec^2 3z = \frac{1}{\cos^2 3z}$. Функция $\cos^2 3z$ принимает значения из промежутка $[0; 1]$ для всех $z \in \mathbb{R}$. Функция $\sec^2 3z$ соответственно принимает значения из бесконечного промежутка $[1; +\infty)$ для всех $z \in \mathbb{R}$, $z \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$, $n \in \mathbb{Z}$ (в этих точках $\cos 3z = 0$), т. е. на области определения этой функции $\sec^2 3z \geq 1$ и соответственно $12 \sec^2 3z \geq 12$ для всех допустимых z (оценка снизу). Для левой части уравнения справедлива оценка сверху:

$$(2 + \cos 2x)(3 - \sin y) \leq (2 + 1)(3 - (-1)) = 12,$$

откуда следует, что если решение (x^*, y^*, z^*) уравнения существует, то должны выполняться равенства

$$\begin{cases} \cos 2x^* = 1, \\ \sin y^* = -1, \\ \cos^2 3z^* = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^* = \pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ y^* = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}; \\ z^* = \frac{\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $y = -\pi/2 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; $z = \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Приведенные примеры показывают, что метод оценок является эффективным способом нахождения решений или установления их отсутствия для некоторых тригонометрических уравнений. В отдельных случаях увидеть такое уравнение легко, как, например, в примере 4.34. В других случаях целесообразность применения метода оценок становится очевидной после, возможно, не одной неудачной попытки решить такое уравнение другими способами.

Пример 4.35. Решите уравнение

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = 0.$$

Р е ш е н и е. В силу формулы (2.52)

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

исходное уравнение равносильно для всех $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2\pi\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}$, уравнению

$$\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2} = 0.$$

Его решения:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{nx}{2} = \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ \frac{(n+1)x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi m}{n}, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi(2k+1)}{n+1}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right]$$

При исключении из полученного множества решений точек $x = 2\pi\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}$ (в них $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = n \neq 0$), получается окончательный

Ответ: $x_1 = \frac{2\pi m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq n\tilde{m}$, $\tilde{m} \in \mathbb{Z}$; $x_2 = \frac{\pi(2\ell+1)}{n+1}$, $\ell \in \mathbb{Z}$.

Пример 4.36. Вычислите

$$A = \sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{5} + \dots + \sin \frac{9}{5}\pi.$$

Р е ш е н и е. Воспользовавшись формулой (2.39)

$$\left(\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right),$$

при $n = 18$, $x = \frac{\pi}{10}$ будем иметь

$$A = \frac{\sin \frac{18}{20}\pi \sin \frac{19}{20}\pi}{\sin \frac{\pi}{20}}.$$

Поскольку $\sin \frac{19}{20}\pi = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{20} \right) = \sin \frac{\pi}{20}$, то $A = \sin \frac{9}{10}\pi = \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (см. пример 2.18).

Ответ: $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

4.10. Уравнения с радикалами и модулями

Тригонометрические уравнения с радикалами отличаются от других классов тригонометрических уравнений прежде всего необходимостью и важностью нахождения области допустимых значений уравнения.

Пример 4.37. Решите уравнение

$$\sqrt{\sin x} = \cos x.$$

Решение. Исходное уравнение равносильно системам

$$\begin{cases} \sin x = \cos^2 x, \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x + \sin x - 1 = 0, \\ \cos x \geq 0. \end{cases}$$

Обозначив $t = \sin x$, $0 \leq t \leq 1$, получим квадратное уравнение $t^2 + t - 1 = 0$. Его корни:

$$t_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < -1, \quad t_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad (0 < \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < 1).$$

Решение уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ запишем в виде двух серий:

$$\begin{cases} x = \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Корни второй серии являются посторонними (проверьте!).

Ответ: $x = \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 4.38. Решите уравнение

$$\sqrt{\cos x - 1} = \sin \frac{x}{4}.$$

Решение. Множество, на котором будем искать решение уравнения, задается системой неравенств

$$\begin{cases} \cos x - 1 \geq 0, \\ \sin \frac{x}{4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq 1, \\ \sin \frac{x}{4} \geq 0. \end{cases}$$

Вместе с тем $\cos x \leq 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Из системы неравенств

$$\begin{cases} \cos x \geq 1, \\ \cos x \leq 1 \end{cases}$$

следует, что $\cos x = 1$.

Тогда исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \sin \frac{x}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = 4\pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4.39. Решите уравнение

$$\sqrt{1 + \sin 2x} = \cos x + \sin x. \quad (4.20)$$

Решение. Из уравнения непосредственно следует неравенство $\cos x + \sin x \geq 0$. Поскольку $1 + \sin 2x = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = (\sin x + \cos x)^2$, то уравнение (4.20) равносильно следующему: $|\sin x + \cos x| = \cos x + \sin x$.

Для всех x , удовлетворяющих неравенству $\cos x + \sin x \geq 0$, это уравнение будет тождеством:

$$\sin x + \cos x = \sin x + \cos x.$$

Таким образом, решение уравнения (4.20) свелось к решению неравенства $\sin x + \cos x \geq 0$:

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x \geq 0 &\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3}{4}\pi + 2\pi n \right], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4.40. Решите уравнение

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 2|\sin x|. \quad (4.21)$$

Решение. $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ для всех $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому уравнение (4.21) равносильно на ОДЗ уравнению

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\cos x|} = 2|\sin x| &\Leftrightarrow |\sin 2x| = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = \pm 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4.41. Решите уравнение

$$\sqrt{1 - \cos x} = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}. \quad (4.22)$$

Решение. *Способ 1.* Воспользовавшись формулой понижения степени (2.18), получим

$$\sqrt{1 - \cos x} = \sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \sqrt{2} \left| \sin \frac{x}{2} \right|.$$

Тогда исходное уравнение принимает вид

$$\sqrt{2} \left| \sin \frac{x}{2} \right| = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \left| \sin \frac{x}{2} \right| \cdot \sin \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2}, \\ x \neq 2\pi n. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая: 1) $\sin \frac{x}{2} > 0$, 2) $\sin \frac{x}{2} < 0$.

$$1) \begin{cases} \sqrt{2} \sin^2 \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2} \right) = \cos \frac{x}{2}, \\ x \neq 2\pi n. \end{cases}$$

Обозначив $\cos \frac{x}{2} = t$, получим уравнение $t^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t - 1 = 0$.

Его корни: $t_1 = -\sqrt{2}$, $t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Подходит только второй корень. Решив уравнение $\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, получим

$$x = \pm \frac{\pi}{2} + 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку $\sin \frac{x}{2} > 0$, то отбираем корни $x = \frac{\pi}{2} + 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$2) \begin{cases} -\sqrt{2} \sin^2 \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \left(\cos^2 \frac{x}{2} - 1 \right) = \cos \frac{x}{2}, \\ x \neq 2\pi n. \end{cases}$$

Обозначив $t = \cos \frac{x}{2}$, получим уравнение $t^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}t - 1 = 0$.

Его корни: $t_1 = \sqrt{2}$; $t_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Исключив корень t_1 , имеем

$$\cos \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \pm \frac{3}{4}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{2}\pi + 4\pi n.$$

Из исходного уравнения следует, что $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \geq 0$. Поэтому оставляем $x = -\frac{3}{2}\pi + 4\pi n$.

Получили две серии корней: $x_1 = \frac{\pi}{2} + 4\pi n$; $x_2 = -\frac{3}{2}\pi + 4\pi n$, которые можно объединить в одну: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Способ 2. Применим универсальную подстановку

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}: 1 - \cos x = 1 - \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2t^2}{1+t^2}.$$

Имеем

$$\sqrt{\frac{2t^2}{1+t^2}} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{2t^2}{1+t^2} = \frac{1}{t^2} \Rightarrow 2t^4 - t^2 - 1 = 0.$$

Решив это уравнение при условии $t > 0$, получим $t = 1$, или $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Способ 3. В соответствии с формулой (2.21) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ (перед корнем знак «+», так как из уравнения (4.22) следует, что $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \geq 0$).

Уравнение (4.22) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\cos x} &= \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \Leftrightarrow 1-\cos x = \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\cos x)^2 = 1+\cos x, \\ \cos x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Из полученного множества корней необходимо отобрать те, которые удовлетворяют условию $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \geq 0$, т. е.

$$\pi n \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\pi n \leq x \leq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Последнему неравенству удовлетворяют значения $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, с четными номерами n , т. е. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

4.11. Уравнения с дополнительными условиями. Отбор корней

Пример 4.42. Решите уравнение

$$\sqrt{16 - x^2} \cos \frac{4\pi x}{3} = 0.$$

Решение. Уравнение определено на отрезке $[-4; 4]$ и равносильно смешанной системе

$$\left\{ \begin{array}{l} 16 - x^2 = 0, \\ \cos \frac{4\pi x}{3} = 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \pm 4, \\ \frac{4\pi x}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ -4 \leq x \leq 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \pm 4, \\ x = \frac{3(2n+1)}{8}, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ -4 \leq x \leq 4. \end{array} \right.$$

Решив неравенство $-4 \leq \frac{3(2n+1)}{8} \leq 4$, получим, что $-5 \leq n \leq 4$.

Ответ: $x_{1,2} = \pm 4$; $x_3 = \frac{3(2n+1)}{8}$, $n = -5, -4, \dots, 4$.

Пример 4.43. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin 2x = (\sqrt{2} + 1)(\sin x + \cos x - 1), \\ \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1. \end{cases}$$

Решение. Обозначив $\sin x + \cos x = t$, $\sin 2x = t^2 - 1$, получим, что первое уравнение равносильно уравнению

$$t^2 - (\sqrt{2} + 1)t + \sqrt{2} = 0.$$

Его корни: $t_1 = \sqrt{2}$, $t_2 = 1$. Уравнения $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ и $\sin x + \cos x = 1$ имеют соответственно решения:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \\ x_2 &= \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}; \quad x_3 = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Применив ко второму уравнению формулу понижения степени (2.17), получим равносильное уравнение

$$\cos 4x(2 \cos 2x + 1) = -1.$$

Пусть теперь $t = \cos 2x$. Тогда $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2t^2 - 1$ и в результате получаем уравнение $t(2t^2 + t - 1) = 0$. Его корни: $t_1 = 0$, $t_2 = -1$, $t_3 = \frac{1}{2}$.

Решив уравнения $\cos 2x = 0$, $\cos 2x = -1$, $\cos 2x = \frac{1}{2}$, получим соответственно:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}; \\ x_{3,4} &= \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Сопоставляя решения (4.23) и (4.24), заключаем, что одновременно решениями каждого уравнения будут числа $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Решение примера можно упростить. Действительно, после нахождения корней первого уравнения достаточно отобрать те, которые являются одновременно решениями и второго уравнения. Подстановка серий $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, во второе уравнение показывает, что они являются его решениями, а корни серии $x_3 = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, не удовлетворяют второму уравнению.

Пример 4.44. Найдите все корни уравнения

$$\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x} = \sec x - 1, \quad (4.25)$$

принадлежащие отрезку $[-2\pi; 2\pi]$.

Решение. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x = \sec^2 x - 2 \sec x + 1, \\ \sec x - 1 \geq 0. \end{cases} \quad (4.26)$$

Но $\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$, а $\sec x = \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1}$, поскольку $\sec x \geq 1$. Поэтому уравнение (4.26) равносильно следующему:

$$-\sqrt{3} \operatorname{tg} x = 2 - 2\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1},$$

или

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} x \quad (\operatorname{tg} x \geq -\frac{2}{\sqrt{3}}).$$

Отсюда получаем $\operatorname{tg} x = 0$ или $\operatorname{tg} x = 4\sqrt{3}$. Решениями этих простейших уравнений будут серии $x_1 = 2\pi n$ и $x_2 = \operatorname{arctg} 4\sqrt{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Отрезку $[-2\pi; 2\pi]$ принадлежат три корня первой серии: -2π , 0 , 2π , и два корня второй серии: $\operatorname{arctg} 4\sqrt{3}$ и $\operatorname{arctg} 4\sqrt{3} - 2\pi$ (рис. 4.9).

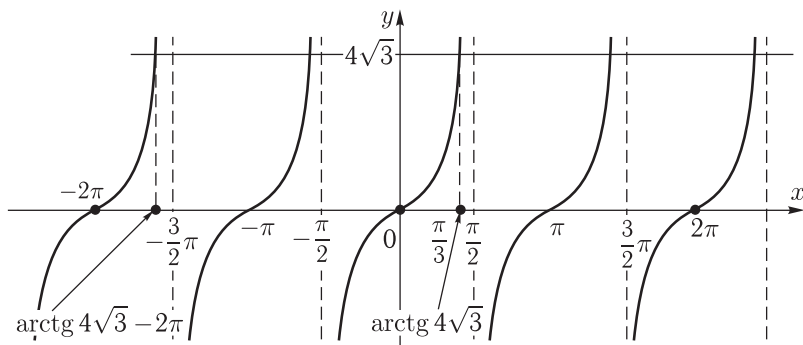


Рис. 4.9

Ответ: -2π ; 0 ; 2π ; $\operatorname{arctg} 4\sqrt{3}$; $\operatorname{arctg} 4\sqrt{3} - 2\pi$.

4.12. Уравнения со сложными тригонометрическими функциями

Пример 4.45*. Решите уравнение

$$\cos(\cos x) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение. Обозначим $\cos x = t$. Тогда исходное уравнение примет вид простейшего тригонометрического уравнения с дополнительным условием

$$\begin{cases} \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ -1 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Его решение $t = \pm \frac{\pi}{6}$. Возвратившись к старой переменной x , вновь получим простейшее уравнение $\cos x = \pm \frac{\pi}{6}$ и его решение $x = \pm \arccos\left(\pm \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x_{1,2} = \pm \arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$x_{3,4} = \pm \left(\pi - \arccos \frac{\pi}{6} \right) + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4.46*. Решите уравнение

$$\sin(\cos x) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение. Обозначив $\cos x = t$, $t \in [-1; 1]$, получим простейшее уравнение $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, которое не имеет решения на множестве $[-1; 1]$. Действительно, $1 < \frac{\pi}{3}$, и потому $\sin 1 < \sin \frac{\pi}{3} < \sin \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\emptyset$.

4.13. Задачи для самостоятельного решения

К подразделу 4.1

Решите уравнения.

1. $\cos^2 x = \frac{3}{4}$. 2. $\cos^2 x = \frac{1}{2}$. 3. $\cos^2 x = \frac{1}{4}$. 4. $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$.
 5. $\operatorname{tg}^2 x = 1$. 6. $\operatorname{tg}^2 x = 3$. 7. $\cos x = \sin \frac{3}{2}$. 8. $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{ctg} 3$.
 9. $\sqrt{2} \sin 5x = \operatorname{tg} \frac{2}{5} \pi$. 10. $2 \cos 5x + \operatorname{cosec} \frac{7}{6} \pi = 0$.

К подразделу 4.2

Решите уравнения (11–14).

11. $2 \sin 2x - 2\sqrt{3} \cos 2x = \frac{1}{3}$.
 12. $3 \sin \left(5x - \frac{\pi}{3}\right) + 4 \cos \left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = 6$.
 13. $\sqrt{3} \sin \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{6} \cos \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$.
 14. $\sqrt{8} \sin 2x - \sqrt{24} \cos 2x = -4$.

Найдите множества значений функций (15–16).

15. $f(x) = 12 \sin \left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) - 5 \cos \left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$.
 16. $f(x) = 6 \sin 6x + 14 \cos^2 3x - 5$.

К подразделу 4.3

Решите уравнения.

17. $\cos^3 x + 2 \cos x (\sin x + 1) = 0$. **18.** $\operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x = 2$.

19. $\operatorname{tg} \left(x + \frac{5}{4}\pi \right) - \operatorname{ctg} \frac{3}{4}\pi = 2 \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$.

20. $2 \sin^3 \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} - x \right) + 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = 0$.

К подразделу 4.4

Решите уравнения.

21. $\sin^2 x - 2 \sin 2x + 3 \cos^2 x = 0$.

22. $3 \sin^3 x + \frac{1}{2} \sin x \sin 2x - 2 \sin x = 0$.

23. $\cos 2x \sin x + \sin 3x + \cos 3x - 4 \sin x + 3 \cos x = 0$.

24. $\sin^3 x \cos x + 2 \sin^2 x \cos^2 x - 3 \sin x \cos^3 x - 6 \cos^4 x = 0$.

25. $\sin x + \cos x - 4 \cos^3 x = 0$.

26. $\sin^2 x + 4 \cos^2 x + 2 \sin^4 x = 3$.

27*. $\sin^4 x + 3 \cos^4 x + \cos^3 x \sin x + \sin^3 \cos x = \frac{1}{2}$ при условии $|\operatorname{tg} x| \leq 1$.

К подразделу 4.5

Решите уравнения (28–38).

28. $\sin^4 x + 3 \cos^4 x = \frac{3}{4}$. **29.** $7 \cos^4 x + \sin^4 x + \cos 4x = \frac{1}{2}$.

30. $\cos^2 2x + \sin^2 4x = \frac{3}{2}$. **31*.** $\cos^6 x - \sin^6 x = \frac{13}{32}$.

32. $\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2} = \frac{5}{8}$.

33. $\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \cos^2 4x$.

34. $\sin^4 4x + \cos^{10} 4x = 1$. **35.** $\sin^6 \frac{x}{2} + \cos^7 \frac{x}{2} = 1$.

36. $\sin^3 x + \cos^8 x = 1$. **37*.** $\cos^2 x - 3 \sin^2 x = 1 + \cos 6x$.

38*. $\cos^6 x - \sin^6 x = \frac{3 + \sin^2 x}{8}$.

Найдите множества значений функций (39–41).

39. а) $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$; б) $f(x) = \cos^6 x - \sin^6 x$;
в) $f(x) = \cos^8 x - \sin^8 x$; г) $f(x) = \cos^{2n} x - \sin^{2n} x$.

40. а) $f(x) = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x$; б) $f(x) = \sec^4 x + \operatorname{cosec}^4 x$.

41. а) $f(x) = \frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x}$; б) $f(x) = \frac{1}{\cos^6 x + \sin^6 x}$; в) $f(x) = \frac{1}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}$.

К подразделу 4.6

Решите уравнения.

42. $\cos 2x = \cos x - \sin x$. **43.** $\sin x + \cos x - \frac{1}{2} = \sin 2x$.

44. $\sin 2x(\sin x + \cos x) = 2(\sin x + \cos x - 1)$.

45. $\cos^3 x - \sin^3 x = \cos^2 2x$.

46*. $\sqrt{2}(\sin x - \cos x) + \cos 4x = 1$ при условии $\sin x - \cos x \geq 1$.

47. $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin x \cos x} = 2$.

К подразделу 4.7

Решите уравнения.

48. $\sqrt{2}(\cos 5x + \sin 3x) = \sin x - \cos x$.

49. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$.

50. $\sin 2x \sin 8x = \cos 5x \cos 11x$.

51. $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2 x - \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

52. $\sin^2 2x + \sin^2 6x = \cos^2 x + \cos^2 5x$.

53. $4 \sin 2x \cos 4x \sin 6x + \cos 12x = 0$.

54. $\cos 3x + \sin 4x + \cos 5x + \sin 6x = 0$.

55. $4 \sin x \cos 2x \sin 4x = \cos x$.

К подразделу 4.8

Решите уравнения.

56. $\frac{1}{\cos x - 1} = 3 \left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 1 \right)$. **57.** $\operatorname{tg} 2x - 1 = 2 \operatorname{ctg} \left(2x + \frac{5}{4}\pi \right)$.

58. $\cos 2\pi x \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} - 3 = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} - 3 \cos 2\pi x$.

59. $\frac{1}{\sin x + \cos x} = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$. **60.** $\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\pi \right) - \operatorname{ctg} \frac{13}{4}\pi = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$.

К подразделу 4.9

Решите уравнения.

61. $2y \sin x + y^2 = -1$. **62.** $(1 + 2 \cos x)(2 - \sin y) = 9 + \cos^2 z$.

63. $2 + \sin^2 2x = \cos^2 2x + 3 \sec^2 4x$. **64.** $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x = 2$.

65. $\sec^4 x + \operatorname{cosec}^4 x = 4(1 + \sin 2x)$.

66. $\operatorname{tg}^5 x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x = 3$.

67*. $1 + 2 \sin \frac{11}{2}x \sin \frac{5}{2}x - \cos 3x \cos 8x + \sin^2 2x = 0$.

68*. $\cos^2 \frac{3x}{8} - \cos 5x - \sin 5x + \sqrt{2} = 0$.

69. $\sqrt{2} - \cos x - \sin x + \operatorname{tg}^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

К подразделу 4.10

Решите уравнения.

70. $\sqrt{4 - 6 \cos x} = 2 - \cos x$.

71. $\sqrt{\sin x - \cos x} = \sin x + \cos x$.

72. $\sqrt{-\operatorname{tg} x} = \sqrt{-\cos x}$. **73*.** $\sqrt{4 - \sqrt{2} \cos x} = \operatorname{tg} x$.

74. $\sqrt{\operatorname{tg}^2 x} = 2|\sin x|$. **75.** $|\sin x - 1| = 3 \sin x - 2$.

76. $\sqrt{5 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x - 3} = 2 \operatorname{tg} x - 3$.

77. $|\sin 2x| + |\cos 2x| = \sqrt{2}$. **78.** $|\sin x| \cos x = \frac{1}{4}$.

79*. $\operatorname{ctg} x + \left| \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \right| = \frac{3}{2}$.

К подразделу 4.11**80.** Сколько различных корней имеет уравнение

$$\sin x + \sin 2x + \sin 4x + \sin 5x = 0$$

на промежутке $(0; 2\pi]$?

81. Решите уравнение $\sqrt{10 + 3x - x^2} \operatorname{tg} \frac{4\pi x}{3} = 0$.

82. Решите уравнение $\lg \frac{5-x}{x+4} \cdot \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right) = 0$.

83. Определите число корней уравнения $\cos \frac{\pi x}{2} = \frac{x-1}{3}$.

84. Решите уравнение $\frac{\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{1 + \cos x}} = \sin \frac{x}{2}$.

85. Решите уравнение $\frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \sqrt{2} \cos x$.

86. Найдите корни уравнения

$$2 \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) + \cos x + \frac{1}{\cos x} = 11,$$

принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.

87. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = \cos 2x, \\ \cos^2 x + \cos^2 3x = 1. \end{cases}$$

К подразделу 4.12

Решите уравнения.

88. $\sin(\sin x) = 0$. 89. $\cos(\cos x) = 0$.

90. $\sin(\sin x) = 1$. 91. $\cos(\cos x) = 1$.

92. $\sin(\cos x) = \frac{1}{2}$. 93. $\cos(\sin x) = \frac{1}{2}$.

94. $\operatorname{tg}(\sin x) = 1$. 95. $\sin(\sin(\sin x)) = \frac{1}{2}$.

Задачи вступительных экзаменов

96. (МГУ, ВМиК, 1999 г.) Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{1 - \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)}{8}} = \sin x \cos x.$$

97. (МГУ, ВМиК, 1999 г.) Решите уравнение

$$6 \operatorname{tg} 13x + 2 \operatorname{ctg} 13x - \sqrt{2} \sin 12x - 4 \sin \left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{20}{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}.$$

98. (МГУ, геологический факультет, 1999 г.) Решите уравнение

$$\left| -\cos^2 2x + 3\sqrt{-\cos 2x} + \frac{1}{4} \right| = \left| \cos^2 2x + 3\sqrt{-\cos 2x} - \frac{1}{4} \right|.$$

99. (МГУ, факультет ВМиК, 1999 г.) Решите уравнение

$$\cos(\pi(x - 5\sqrt{x})) \cdot \cos(\pi(4x + \sqrt{x})) = 1.$$

100. (МГУ, геологический факультет, 1999 г.) Найдите все решения уравнения

$$\sin x + \cos 2x - \sin 2x = 1,$$

расположенные на отрезке $\left[-\frac{4}{3}\pi; 0\right]$.

101. (МГУ, экономический факультет, 2001 г.) Решите уравнение

$$\sqrt{5} \cos \left(\frac{\pi}{\sqrt{x}} \sqrt{15x - 6x^2 - x^3} \right) - \sqrt{5} \sin \left(\frac{\pi}{x} \sqrt{15x^2 - 6x^3 - x^4} \right) = \sqrt{10}.$$

102. (МГУ, экономический факультет, 2001 г.) Решите уравнение

$$\sqrt{2} \sin \left(\pi \sqrt{x} \sqrt{\frac{5}{x} - x + 6} \right) + \sqrt{6} \cos \left(\pi x \sqrt{\frac{5}{x^2} + \frac{6}{x} - 1} \right) = \sqrt{8}.$$

103. (МГУ, ВМиК, 2002 г.) Найдите $\operatorname{tg} |x|$, если

$$\left(5 \sin x + 15 \cos x + \sqrt{5} \right) \left(\sqrt{5} - 2\sqrt{\sin |x|} \right) = 0.$$

104. (МГУ, факультет наук о материалах и факультет биоинженерии и биоинформатики, 2002 г.) Решите уравнение

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \sin \left(3x - \frac{\pi}{5} \right) + 2 \sin \left(8x - \frac{\pi}{3} \right) &= \\ &= 2 \sin \left(2x + \frac{11\pi}{15} \right) + 3 \cos \left(3x - \frac{\pi}{5} \right). \end{aligned}$$

105. (МГУ, геологический факультет, 2002 г.) Найдите все корни уравнения

$$|\sin 2x| + \cos x = 0,$$

принадлежащие промежутку $\left[-\sqrt{3}; \frac{8}{3}\right]$.

106. (МГУ, филологический факультет, 2002 г.) Решите уравнение

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) + \sqrt{3} (\cos x - \sin x)} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}.$$

107. (МГУ, механико-математический факультет, 2002 г.) Найдите все α , при которых расстояние между любыми двумя соседними корнями уравнения

$$\cos \alpha \cdot \cos 3x - \sin 3\alpha \cdot \sin x + 2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2x = 3 \sin \alpha$$

не превосходит $\frac{\pi}{3}$.

108. (МГУ, ВМиК, 2003 г.) Решите уравнение

$$\sqrt{\sin x \cdot \sin 3x} = \cos x.$$

109. (МГУ, физический факультет, 2003 г.) Решите уравнение

$$2 \sin(6 \cos x \cos 2x - 3 \cos 3x) = 1.$$

110. (МГУ, химический факультет и факультет наук о материалах, 2003 г.) Решите уравнение

$$\cos^2 8x + \sin^2 x = 2 \sin^2 x \cos^2 8x.$$

111. (МГУ, геологический факультет, 2003 г.) Решите уравнение

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + 2 \cos^2 x = 1.$$

112. (МГУ, экономический факультет, 2003 г.) Найдите все a , при которых уравнение

$$a^2 \sin \left(\frac{\pi + 2}{2} - x \right) + \sin^2 \left(\frac{2x}{a+1} - \frac{2}{a+1} \right) - \sqrt{4x^2 + 8 - 8x} = 3 + \arcsin |1 - x|$$

имеет единственный корень.

113. (МГУ, филологический факультет, 2003 г.) Сколько различных корней на отрезке $[-2; 0]$ имеет уравнение

$$\sin 5\pi x + \cos 2\pi x = 0?$$

114. (МФТИ, 1999 г.) Решите уравнение

$$2 + \sqrt{3} \cos x + |\sin x| = 4 \sin^2 x.$$

115. (МФТИ, 2000 г.) Решите уравнение

$$\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} = 8 \cos 4x + \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}.$$

116. (МФТИ, 2001 г.) Решите уравнение

$$\frac{\cos^3 x \sin 3x}{\cos 2x} + \frac{\sin^3 x \cos 3x}{\cos 2x} = 3 \sin 2x \cos x.$$

117. (МФТИ, 2002 г.) Решите уравнение

$$\frac{3 - 4 \cos 2x - 8 \sin^4 x}{\sin 2x + \cos 2x} = \frac{1}{\sin 2x}.$$

118. (МФТИ, 2002 г.) Решите уравнение

$$\cos^2 x + \cos^2 2x = 1 + \operatorname{ctg} 3x.$$

119. (ГУ ВШЭ, 2002 г.) Решите уравнение

$$\sqrt{6} \sin x + \sqrt{1 + \sin x} = 0.$$

120. (ГУ ВШЭ, 2002 г.) Разность наибольшего и наименьшего значений функции

$$y = 2 \cos^2 x - 4 \sqrt{\sin^2 x}$$

равна:

$$1) 6; 2) 5; 3) 4; 4) 3; 5) 2.$$

121. (ГУ ВШЭ, 2003 г.) Укажите множество значений функции

$$y = \frac{8}{5 \sin 2x - 3} :$$

- 1) $(-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$; 2) $[-1; 4]$; 3) $(-\infty; 4]$;
4) $[-1; +\infty)$; 5) $(-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$.

122. (ГУ ВШЭ, 2003 г.) Уравнение

$$\sin \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{x} \right) = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

имеет корень, принадлежащий промежутку:

- 1) $[3; 8)$; 2) $[8; 11)$; 3) $[11; 13)$; 4) $[13; 17)$; 5) $[17; 999)$.

123. (ГУ ВШЭ, 2003 г.) Функция

$$y = \frac{5 - 4 \sin^2 x}{\cos x}$$

на промежутке $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ принимает свое наименьшее значение в точке x , которая принадлежит промежутку:

$$1) \left(0; \frac{1}{2}\right]; 2) \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]; 3) \left(\frac{3}{4}; 1\right]; 4) \left(1; \frac{5}{4}\right]; 5) \left(\frac{5}{4}; \frac{\pi}{2}\right].$$

124. (ГУ ВШЭ, 2004 г.) Укажите второй по величине положительный корень уравнения

$$\sin \frac{\pi x}{12} = \cos \frac{5\pi}{6}:$$

$$1) 8; 2) 20; 3) 16; 4) 22; 5) 14.$$

125. (ГУ ВШЭ, 2005 г.) Укажите множество всех корней уравнения

$$\sqrt{-\sin x} = \sqrt{\sqrt{3} \cos x}:$$

$$1) \frac{\pi}{3} + 2\pi n; 2) \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; 3) -\frac{\pi}{3} + \pi n;$$

$$4) -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; 5) -\frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

126. (ГУ ВШЭ, 2006 г.) Если число A равно сумме двух наибольших корней уравнения

$$32 \cos \frac{2\pi}{x} \cos \frac{4\pi}{x} \cos \frac{8\pi}{x} \cos \frac{16\pi}{x} \cos \frac{32\pi}{x} - \cos \frac{62\pi}{x} = 0,$$

то остаток от деления ближайшего к A натурального числа на 5 равен:

$$1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 0.$$

4.14. Указания и ответы

Указания

7. Преобразовать: $\arccos\left(\sin \frac{3}{2}\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\right)\right) = \frac{\pi - 3}{2}.$

8. Преобразовать: $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 3) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 3\right)\right) = \frac{\pi}{2} - 3$ ($\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha$, если $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

9. Поскольку $\frac{2}{5}\pi > \frac{\pi}{3}$ и $\operatorname{tg} x$ является монотонно возрастающей функцией на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, содержащем точки $\frac{2}{5}\pi$

и $\frac{\pi}{3}$, то справедливо неравенство $\operatorname{tg} \frac{2}{5}\pi > \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. С другой стороны, $\sqrt{2} \sin 5x \leq \sqrt{2}$, и потому уравнение не имеет решения.

10. Преобразовать: $\operatorname{cosec} \frac{7}{6}\pi = \frac{1}{\sin \frac{7}{6}\pi} = -\frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = -2$.

12. Поскольку $3^2 + 4^2 = 25 < 36 = 6^2$, то уравнение не имеет решения.

17. Уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin^2 x - 2 \sin x - 3 = 0. \end{cases}$$

19. Уравнение преобразуется к виду

$$\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 1 = \frac{2}{\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}.$$

Ввести замену $t = \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ и решить получившееся квадратное уравнение.

20. Уравнение приводится к алгебраическому уравнению третьей степени

$$2t^3 - t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t^2 - 1)(2t - 1) = 0$$

относительно переменной $t = \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$.

22. Уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ 3 \sin^2 x + \sin x \cos x - 2 = 0, \end{cases}$$

второе уравнение которой приводится к однородному

$$\sin^2 x + \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0.$$

23. Воспользовавшись формулами

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x,$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x,$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x,$$

получить уравнение $2 \cos^3 x - 3 \sin^3 x = 0$, равносильное исходному.

24. Однородное уравнение четвертой степени, равносильное совокупности двух уравнений: простейшего $\cos x = 0$ и однородного

$$\sin^3 x + 2 \sin^2 x \cos x - 3 \sin x \cos^2 x - 6 \cos^3 x = 0.$$

Последнее уравнение сводится к алгебраическому

$$t^3 + 2t^2 - 3t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t + 2)(t^2 - 3) = 0$$

относительно переменной $t = \operatorname{tg} x$.

25. Умножив $\sin x + \cos x$ на $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$, получить однородное уравнение третьей степени.

27. Преобразуем правую часть: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = \frac{1}{2}(\cos^4 x + 2\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x)$.

В результате получается однородное уравнение четвертой степени

$$\sin^4 x + 2\sin^3 x \cos x - 2\sin^2 x \cos^2 x + 2\sin x \cos^3 x + 5\cos^4 x = 0.$$

Разделив обе части этого уравнения на $\cos^4 x$, получим уравнение четвертой степени относительно переменной $t = \operatorname{tg} x$

$$t^4 - 2t^3 - 2t^2 + 2t + 5 = 0.$$

Это уравнение имеет корень

$$t \equiv \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Покажем, что других корней, удовлетворяющих условию $|\operatorname{tg} x| \leq 1$, уравнение не имеет. Разделив многочлен $t^4 - 2t^3 - 2t^2 + 2t + 5$ на двучлен $t + 1$ «уголком» или воспользовавшись схемой Горнера, получим многочлен третьей степени и соответственно уравнение

$$t^3 + t^2 - 3t + 5 = 0.$$

Числа $t = -1$ и $t = 1$ не удовлетворяют этому уравнению. Если $t \in (-1; 1)$ ($|\operatorname{tg} x| < 1$), то справедливо неравенство $|t^3 + t^2 - 3t| < 5$.

28. Можно решить двумя способами: использовать формулы понижения степени (2.17) и (2.18), либо подстановкой $t = \cos^2 x$ или $t = \sin^2 x$.

Аналогично могут быть решены задачи 29–33.

34–36. См. пример 4.22.

37. Применить преобразования: $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$; $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$; $\cos 6x = \cos(3(2x)) = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x$.

Положить $t = \cos 2x$ ($|t| \leq 1$). Получить и решить уравнение

$$t^3 - \frac{5}{4}t + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow (2t - 1)(2t^2 + t - 2) = 0.$$

38. Применить преобразования: $\cos^6 x - \sin^6 x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 2x\right) = \cos 2x \frac{3 + \cos^2 2x}{4}; \quad \frac{3 + \sin^2 x}{8} = \frac{7 - \cos 2x}{16}.$

Ввести переменную $t = \cos 2x$; получить и решить алгебраическое уравнение

$$4t^3 + 13t - 7 = 0 \Leftrightarrow 4t^3 - t + 14t - 7 = 0 \Leftrightarrow (2t - 1)(2t^2 + t - 7) = 0.$$

39. г) Задача эквивалентна нахождению множества значений функции $f(t) = t^n - (1 - t)^n$, где $t = \cos^2 x$, т. е.

$$E(f) = \left[\min_{0 \leq t \leq 1} f(t); \max_{0 \leq t \leq 1} f(t) \right]$$

(см. пример 4.21).

40. б) Имеем $\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{1}{\sin^4 x} = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\frac{1}{16} \sin^4 2x} = 16 \frac{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x}{\sin^4 2x}.$

Обозначив $t = \sin^2 2x$, $0 < t \leq 1$, получим для правой части выражение

$$f(t) = 16 \left(t^{-2} - \frac{1}{2} t^{-1} \right).$$

Далее найти наименьшее и наибольшее значения $f(t)$ на промежутке $(0; 1]$.

41. Воспользоваться результатами примера 4.21.

46. Обозначив $\sin x - \cos x = t$, получим: $\sin 2x = 1 - t^2$;

$$\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - 2(1 - t^2)^2 = -1 + 4t^2 - 2t^4.$$

Имеем уравнение

$$\begin{aligned} 2t^4 - 4t^2 - \sqrt{2}t + 2 = 0 &\Leftrightarrow t^4 - 2t^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}t + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t^2(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}}(t - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t - \sqrt{2} = 0, \\ t^3 + \sqrt{2}t^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Уравнение $t - \sqrt{2} = 0$, или $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$ имеет корни $x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Уравнение $t^3 + \sqrt{2}t^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$ не имеет корней, удовлетворяющих условию $t \geq 1$. Действительно, функция $f(t) = t^3 + \sqrt{2}t^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ монотонно возрастает при $t > 1$, а

$$f(1) = 1 + \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} > 0.$$

51. Применить преобразование: $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \left[\sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{1}{2} \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} \cos 2x$; $\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 4x\right) = \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$.

53. Применить формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму, а затем суммы тригонометрических функций в произведение.

56. Способ 1. Положив $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, приходим к биквадратному уравнению

$$6t^4 - 5t^2 + 1 = 0.$$

Способ 2. Преобразуем правую часть:

$$3 \left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 1 \right) = 3 \frac{\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{-6 \cos x}{1 + \cos x}.$$

58. Способ 1. Сгруппировав, получить равносильное уравнение

$$(\cos 2\pi x - 1) \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} + 3 \right) = 0.$$

Способ 2. Положить $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = t, x \neq 2n + 1, n \in \mathbb{Z}$.

61. Преобразовать уравнение к равносильному

$$(\sin x + y)^2 + \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x + y = 0. \end{cases}$$

62. Имеем $9 + \cos^2 z \geq 9$ для всех $z \in \mathbb{R}$, а $(1 + 2 \cos x)(2 - \sin y) \leq 9$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$, откуда следует, что если

решение уравнения существует, то должны выполняться равенства:

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \sin y = -1, \\ \cos z = 0. \end{cases}$$

64. Обозначив $t = \operatorname{tg}^4 x$ ($t \in (0, +\infty)$), получить уравнение $t + \frac{1}{t} = 2$, имеющее единственное решение $t = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \pm 1$.

65. В соответствии с результатами задачи 40, б) $\sec^4 x + \operatorname{cosec}^4 x \geq 8$ для всех $x \in \mathbb{R}$, а $4(1 + \sin 2x) \leq 8$.

66. Функция $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x$ является монотонно возрастающей на каждом интервале $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, принимая все числовые значения ($E(f) = \mathbb{R}$). Поэтому уравнение $f(x) = 3$ имеет единственное решение на каждом интервале монотонности. Нетрудно видеть, что $f(x) = 3$ при $\operatorname{tg} x = 1$, т. е. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

67. Преобразовав произведения тригонометрических функций в суммы, получить равносильную форму уравнения

$$(1 + \cos 3x)(1 - \cos 8x) + \sin^2 2x = 0.$$

Далее применить метод оценок.

68. Применить метод оценок.

71. Найти ОДЗ уравнения. Возвести обе части уравнения в квадрат; в полученном уравнении применить подстановку $t = \sin x - \cos x$.

73. Применив подстановку $\cos x = t$, получить уравнение

$$\sqrt{2}t^3 - 3t^2 + 1 = 0.$$

Для решения этого уравнения можно использовать подстановку $\sqrt{2}t = z$. Тогда

$$z^3 - 3z^2 + z = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z^2 - 2z - z) = 0.$$

77. Способ 1. Максимум выражения $|\sin 2x| + |\cos 2x|$ равен $\sqrt{2}$ и достигается при

$$2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Способ 2. Возвести обе части уравнения в квадрат. Получить и решить простейшее уравнение $|\sin 4x| = 1$.

78. Функция $f(x) = |\sin x| \cos x$ является четной и 2π -периодической. Поэтому достаточно найти решение на отрезке $[0; \pi]$, на котором $|\sin x| = \sin x$ и $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$.

79. Раскрыв модуль, свести уравнение к совокупности двух однородных уравнений.

81. Найти корни уравнения $10 + 3x - x^2 = 0$: $x_1 = -2$; $x_2 = 5$. Далее отобрать корни уравнения $\operatorname{tg} \frac{4\pi x}{3} = 0$, удовлетворяющие условию $-2 \leq x \leq 5$.

83. Для решения задачи использовать графический подход. Построив графики функций $y_1(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$ и $y_2(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{3}$, вычислить значения этих функций в точках, определяющих взаимное положение графиков функций.

$$\begin{aligned} \text{84. } \frac{\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{1 + \cos x}} &= \frac{\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2} \left| \cos \frac{x}{2} \right|} = \\ &= \begin{cases} 1, & \text{если } -\pi + 4\pi n < x < \pi + 4\pi n, \\ -1, & \text{если } \pi + 4\pi n < x < 3\pi + 4\pi n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Но $\sin \frac{x}{2} = 1$ при $x = \pi + 4\pi n$ и $\sin \frac{x}{2} = -1$ при $x = 3\pi + 4\pi n$.

В этих точках левая часть уравнения не определена.

Ответы

1. $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_{3,4} = \pm \frac{5}{6}\pi + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, или в виде двух серий $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **2.** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **4.** $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **5.** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$. **6.** $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **7.** $x_{1,2} = \pm \frac{\pi-3}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **8.** $x = \frac{\pi-6}{6} + \frac{\pi}{3}n$, $n \in \mathbb{Z}$. **9.** $\emptyset$. **10.** $x = \frac{2}{5}\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

11. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{(-1)^n}{2} \arcsin \frac{1}{12} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$. **12.** $\emptyset$. **13.** $x = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} + (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$. **14.** $x = \frac{\pi}{6} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$, или в виде двух серий $x_1 = \frac{\pi}{24} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $x_2 = \frac{19}{24}\pi + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. **15.** $[-13; 13]$. **16.** $\left[2 - \sqrt{85}; 2 + \sqrt{85}\right]$.

17. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **18.** $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_2 = \arctg 3 + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. **19.** $x_1 = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} - \arctg 2 + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. **20.** $x_1 = \frac{5}{6}\pi + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_2 = \frac{7}{6}\pi + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; $x_3 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

21. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_2 = \arctg 3 + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. **22.** $x_1 = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; $x_3 = -\arctg 2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **23.** $x = \arctg \sqrt[3]{\frac{2}{3}} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **24.** $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_{2,3} = \pm \frac{\pi}{3} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; $x_4 = -\arctg 2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **25.** $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **26.** $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}m$, $m \in \mathbb{Z}$. **27.** $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

28. $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **29.** $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_{3,4} = \pm \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{1}{4} \right) + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. **30.** $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_{2,3} = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}m$, $m \in \mathbb{Z}$. **31.** $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **32.** $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **33.** $x_1 = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_2 = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}m$, $m \in \mathbb{Z}$. **34.** $x_1 = \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}m$, $m \in \mathbb{Z}$. **35.** $x_1 = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_2 = 4\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. **36.** $x_1 = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. **37.** $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_{3,4} = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{17} - 1}{4} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. **38.** $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **39.** а) - г) $[-1; 1]$. **40.** а) $[4; +\infty)$; б) $[8; +\infty)$. **41.** а) $[1; 2]$; б) $[1; 4]$; в) $[1; 2^{n-1}]$.

42. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; $x_3 = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **43.** $x_1 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_{2,3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. **44.** $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_2 = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. **45.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; $x_3 = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **46.** $x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **47.** $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

48. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_{2,3} = \frac{\pi}{16} \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}m$, $m \in \mathbb{Z}$. **49.** $x_{1,2} = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_3 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}m$, $m \in \mathbb{Z}$. **50.** $x_1 = \frac{\pi}{13}n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$x_2 = \frac{\pi}{3}m, m \in \mathbb{Z}$. **51.** $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$. **52.** $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n, n \in \mathbb{Z};$
 $x_2 = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi}{7}k, k \in \mathbb{Z}$ (решение $x = \frac{\pi}{2} + \pi t, t \in \mathbb{Z}$, содержится
 в серии x_2). **53.** $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n, n \in \mathbb{Z}; x_{2,3} = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}m, m \in \mathbb{Z}$.
54. $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{9}m, m \in \mathbb{Z}$. **55.** $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{6} +$
 $+\pi n, n \in \mathbb{Z}; x_3 = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}m, m \in \mathbb{Z}$.

56. $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x_{3,4} = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

57. $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}; x_2 = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3 + \frac{\pi}{2}m, m \in \mathbb{Z}$. **58.** $x_1 =$
 $= -\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} 3 + 2n, n \in \mathbb{Z}; x_2 = 2k, k \in \mathbb{Z}$. **59.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

60. $x_1 = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x_2 = -2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

61. $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; y_1 = -1$ и $x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$
 $y_2 = 1$. **62.** $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}; z = \frac{\pi}{2} + \pi k,$
 $k \in \mathbb{Z}$. **63.** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$. **64.** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$. **65.** $x =$
 $= \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **66.** $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **67.** $x = \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$.
68. $\emptyset$. **69.** $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

70. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **71.** $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **72.** $x =$
 $= \pi - \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **73.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$
 $x_2 = -\pi + \arccos \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$. **74.** $x_1 = \pi n, n \in \mathbb{Z};$
 $x_{2,3} = \pm \frac{\pi}{3} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$. **75.** $x = (-1)^n \arcsin \frac{3}{4} + \pi n, n \in$
 $\in \mathbb{Z}$. **76.** $x = \operatorname{arctg} \frac{12}{5} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **77.** $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n, n \in \mathbb{Z}$.
78. $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{12} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x_{3,4} = \pm \frac{5}{12}\pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.
79. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; x_2 = -\operatorname{arctg} 2 + \pi m, m \in \mathbb{Z}; x_3 =$
 $= -\operatorname{arctg} \frac{1+\sqrt{41}}{10} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

80. 6. **81.** $x \in \{-2; 5\} \cup \left\{ \frac{3k}{4}, k = -2, -1, 0, \dots, 6 \right\}$. **82.** $x \in$
 $\in \left\{ \frac{1}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi \right\}$. **83.** 5. **84.** $\emptyset$. **85.** $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$

$$2\pi n < x < \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{86.} \quad x \in \left\{ \pm \frac{\pi}{3}; \pm \arccos \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

$$\mathbf{87.} \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{88.} \quad x = \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{89.} \quad \emptyset. \quad \mathbf{90.} \quad \emptyset. \quad \mathbf{91.} \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{92.} \quad x_{1,2} = \pm \arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{93.} \quad \emptyset. \quad \mathbf{94.} \quad x = (-1)^n \arcsin \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{95.} \quad x = (-1)^n \arcsin \left(\arcsin \frac{\pi}{6} \right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{96.} \quad x_1 = \frac{\pi}{18} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; x_2 = \frac{7}{18}\pi + \pi m, m \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{97.} \quad x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{98.} \quad x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{5}{2}\pi; 8 \leq x < 4 + 2\sqrt{6}. \quad \mathbf{99.} \quad x = 4(n-1)^2, n \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{100.} \quad x_1 = -\pi; x_2 = 0; x_3 = -\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\mathbf{101.} \quad x_1 = \frac{\sqrt{335} - 12}{4}, x_2 = \frac{\sqrt{159} - 12}{4}. \quad \mathbf{102.} \quad x_2 = \frac{18 + \sqrt{503}}{6},$$

$$x_2 = \frac{18 + \sqrt{335}}{6}. \quad \mathbf{103.} \quad x \in \left\{ -2; \frac{11}{2} \right\}. \quad \mathbf{104.} \quad x_1 = \frac{8}{45}\pi + \frac{\pi}{3}n,$$

$$n \in \mathbb{Z}; x_{2,3} = -\frac{\pi}{25} \pm \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{5}m, m \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{105.} \quad x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{2}; x_3 = \frac{5}{6}\pi.$$

$$\mathbf{106.} \quad x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; x_2 = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{107.} \quad \alpha = \pi n,$$

$$n \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{108.} \quad x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{109.} \quad x_{1,2} = \pm \arccos \frac{\pi}{18} +$$

$$+ 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x_{3,4} = \pm \arccos \frac{5}{18}\pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{110.} \quad x = \frac{\pi}{2} +$$

$$+ \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{111.} \quad x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; x_2 = -\frac{\pi}{9} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{112.} \quad a = 3. \quad \mathbf{113.} \quad 9. \quad \mathbf{114.} \quad x_1 = \frac{5}{6}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x_2 = \frac{7}{18}\pi + 2\pi m,$$

$$m \in \mathbb{Z}; x_3 = \frac{7}{6}\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; x_4 = \frac{29}{18}\pi + 2\pi \ell, \ell \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{115.} \quad x = \frac{\pi}{3}n,$$

$$n \neq 3k, n, k \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{116.} \quad x_1 = \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}; x_{2,3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m,$$

$$m \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{117.} \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{118.} \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{119.} \quad x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{120.} \quad 1) (y_{\text{наиб}} - y_{\text{наим}} = 6).$$

$$\mathbf{121.} \quad 1) ((-\infty; -1] \cup [4; +\infty)). \quad \mathbf{122.} \quad 1) (x \in [3; 8)). \quad \mathbf{123.} \quad 4) (x \in$$

$$(1; \frac{5}{4}]). \quad \mathbf{124.} \quad 2) (20). \quad \mathbf{125.} \quad 5) (x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n). \quad \mathbf{126.} \quad 5) (0).$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

5.1. Простейшие тригонометрические неравенства

Решение простейших тригонометрических неравенств целесообразно осуществлять либо с использованием графика соответствующей тригонометрической функции, либо с помощью единичной окружности.

Пример 5.1. Решите неравенство

$$\sin x > -\frac{1}{2}.$$

Решение. Функция $\sin x$ определена на всей числовой прямой, непрерывна и является 2π -периодической, поэтому решением неравенства будет объединение интервалов вида $(x_1 + 2\pi n; x_2 + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$, где x_1 и x_2 — корни уравнения

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

на некотором отрезке длиной 2π .

Действительно, прямая $\tilde{y} = -\frac{1}{2}$ пересекает единичную окружность в двух точках M_1 и M_2 . Точке M_1 отвечает угол $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ радиан, а точке M_2 —

угол $\frac{7}{6}\pi$ радиан (рис. 5.1), т.е. $x_1 = -\frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{7}{6}\pi$; тогда

синус угла x радиан будет больше $\left(-\frac{1}{2}\right)$, если ордината $\tilde{y}_P$ точки $P(x)$ на единичной окружности, отвечающей углу x радиан, будет больше $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Из рис. 5.1 видно, что неравенство $\tilde{y}_P > -\frac{1}{2}$

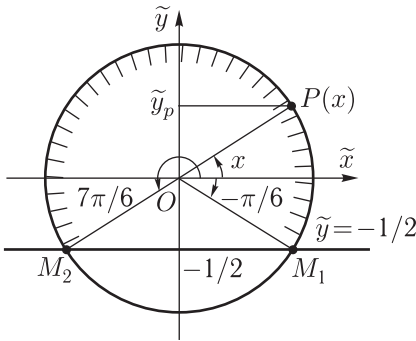


Рис. 5.1

выполняется при $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{7}{6}\pi$, а с учетом периодичности функции $\sin x$ при

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7}{6}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7}{6}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 5.2. Решите неравенство

$$|\cos x| > \frac{1}{2}. \quad (5.1)$$

Решение. *Способ 1.* Построим графики функций $y = |\cos x|$ и $y = \frac{1}{2}$ (рис. 5.2).

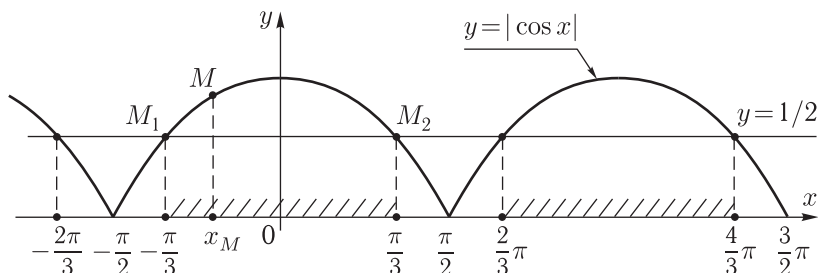


Рис. 5.2

Функция $y = |\cos x|$ определена для всех $x \in \mathbb{R}$, непрерывна и является π -периодической, поэтому достаточно найти решение неравенства на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ длиной π . На этом промежутке прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает график функции $y = |\cos x|$ в двух точках M_1 и M_2 , абсциссы которых соответственно $x_1 = -\frac{\pi}{3}$ и $x_2 = \frac{\pi}{3}$.

Решением неравенства (5.1) будут абсциссы x_M тех точек M графика функции $y = |\cos x|$, которые лежат выше прямой $y = \frac{1}{2}$. Эти абсциссы образуют интервал $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$ внутри отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. С учетом периодичности функции $y = |\cos x|$ решением неравенства (5.1) будет объединение интервалов $\left(-\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

Способ 2. Решение неравенства (5.1) можно осуществить также с помощью единичной окружности. Поскольку

$$|\cos x| > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > \frac{1}{2}, \\ \cos x < -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

то решение неравенства (5.1) равносильно нахождению множества точек $\{\tilde{x}_P\}$ на оси $O\tilde{x}$, таких, что $-1 \leq \tilde{x}_P < -\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{2} < \tilde{x}_P \leq 1$.

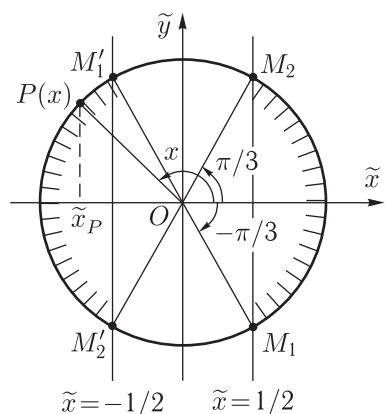


Рис. 5.3

Из рис. 5.3 видно, что искомые точки $P(x)$, абсциссы $\tilde{x}_P$ которых удовлетворяют указанным неравенствам, лежат на дугах M_1M_2 и $M_1'M_2'$. Дуге M_1M_2 отвечает промежуток $(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$, а дуге $M_1'M_2'$ — промежуток $(\frac{2}{3}\pi + 2\pi n; \frac{4}{3}\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Поскольку

$$\frac{2}{3}\pi = -\frac{\pi}{3} + \pi; \quad \frac{4}{3}\pi = \frac{\pi}{3} + \pi,$$

то полученные решения можно записать в виде одного двойного неравенства

$$-\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 5.3. Решите неравенство

$$\operatorname{tg} x \leq -1. \quad (5.2)$$

Решение. Для решения данного неравенства воспользуемся графиком функции $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 5.4). Из рисунка видно, что решением неравенства (5.2) будут все точки полуинтервалов A_1B_1 , A_2B_2 и т. д., т. е.

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

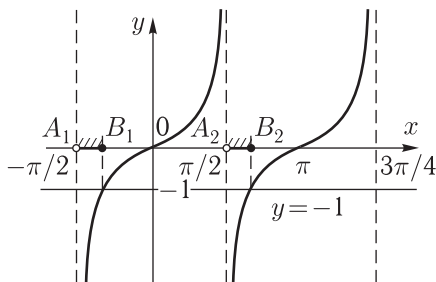


Рис. 5.4

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Некоторые неравенства не являются простейшими, но легко сводятся к ним. Такой случай рассматривается в примерах 5.4 и 5.5.

Пример 5.4. Решите неравенство

$$\cos x + \sin x \geq \sqrt{2}. \quad (5.3)$$

Решение. Поскольку

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right),$$

то неравенство (5.3) равносильно простейшему неравенству $\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \geq 1$. Его решением будет множество точек $x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 5.5. Решите неравенство

$$|\cos x + \sin x| > 1.$$

Решение. Поскольку $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$, то исходное неравенство равносильно неравенствам

$$\left| \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right| > \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) > \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) < -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Эти неравенства аналогичны рассмотренным в примере 5.2. Решив их, получим, что $-\frac{\pi}{4} + \pi n < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + \pi n$, или

$$\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

(рис. 5.5).

Ответ: $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

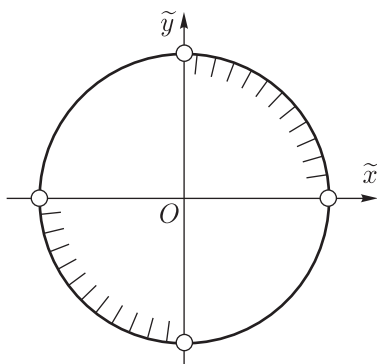


Рис. 5.5

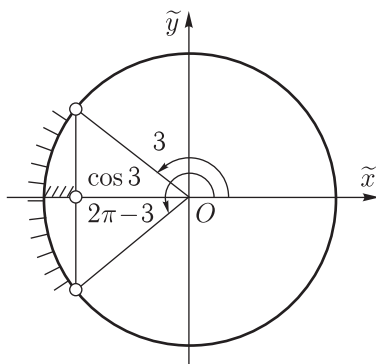


Рис. 5.6

Пример 5.6. Решите неравенства:

а) $\cos x < \cos 3$; б) $\sin x \geq \sin 5$; в) $\operatorname{tg} x \geq \operatorname{ctg} 3$.

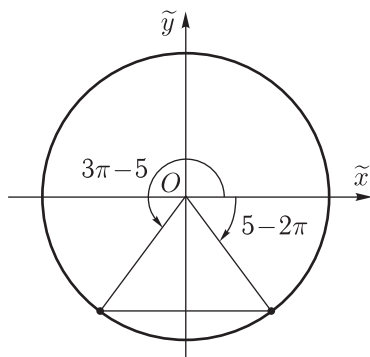


Рис. 5.7

Решение. а) Иллюстрация к неравенству $\cos x < \cos 3$ приведена на рис. 5.6. Из него следует, что решением неравенства на отрезке $[0; 2\pi]$ будет интервал $(3; 2\pi - 3)$, а на всей числовой прямой — объединение интервалов

$$(3 + 2\pi n; 2\pi - 3 + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}.$$

б) Из неравенства $\frac{3}{2}\pi < 5 < 2\pi$ следует (рис. 5.7), что решением неравенства $\sin x \geq \sin 5$ будет множество точек x , удовлетворяющих неравенствам

$$5 - 2\pi + 2\pi n \leq x \leq 3\pi - 5 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

в) Так как $\operatorname{ctg} 3 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - 3 \right)$, $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 3 < \frac{\pi}{2}$ и функция $y = \operatorname{tg} x$ строго возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$, то

$$\operatorname{tg} x \geq \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - 3 \right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 3 + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Это и есть решение неравенства в).

Ответ: а) $3 + 2\pi n < x < 2\pi - 3 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$;

б) $5 - 2\pi + 2\pi n \leq x \leq 3\pi - 5 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$;

в) $\frac{\pi}{2} - 3 + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

5.2. Различные тригонометрические неравенства

Решение тригонометрических неравенств, не являющихся простейшими, можно разделить, как правило, на два этапа. На первом неравенство преобразуется к совокупности простейших неравенств. Это преобразование осуществляется с помощью методов, используемых для решения уравнений (раздел 4). На втором этапе решаются простейшие неравенства.

Пример 5.7. Решите неравенство

$$6 \sin^2 x + \sin x - 2 \geq 0.$$

Решение. *Способ 1.* Положив $\sin x = t$, $|t| \leq 1$, получим квадратное неравенство

$$6t^2 + t - 2 \geq 0.$$

Оно равносильно совокупности неравенств

$$\left(t - \frac{1}{2} \right) \left(t + \frac{2}{3} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -\frac{2}{3}, \\ t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Возвратившись к переменной x , получим совокупность простейших неравенств

$$\begin{cases} \sin x \leq -\frac{2}{3}, \\ \sin x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Иллюстрация к этим неравенствам приведена на рис. 5.8, а. Решение последней совокупности неравенств будет иметь вид

$$\left[\begin{array}{l} -\pi + \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi n \leq x \leq -\arcsin \frac{2}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

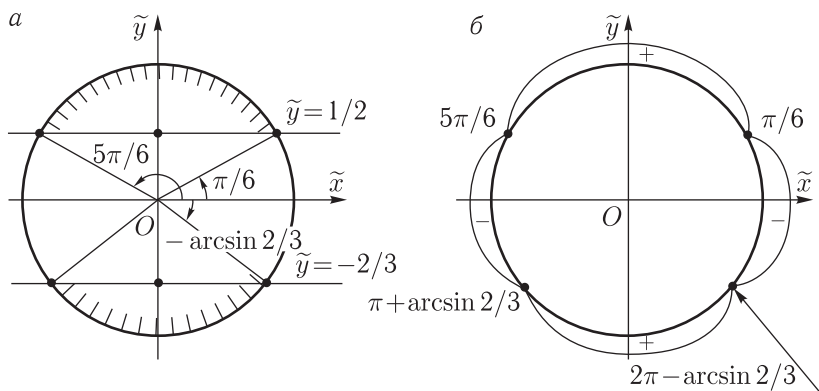


Рис. 5.8

Способ 2. При решении тригонометрических неравенств часто бывает удобно применять метод интервалов, распространенный на тригонометрический круг. Рассмотрим этот метод на данном примере.

Сначала находим корни уравнения

$$6 \sin^2 x + \sin x - 2 = 0.$$

На отрезке $[0; 2\pi]$ в данном случае это будут точки

$$x_1 = \frac{\pi}{6}; \quad x_2 = \frac{5}{6}\pi; \quad x_3 = \pi + \arcsin \frac{2}{3}; \quad x_4 = 2\pi - \arcsin \frac{2}{3}.$$

Они разбивают отрезок $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{7}{6}\pi\right]$ длиной 2π на четыре интервала (рис. 5.8, б):

$$\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi\right); \quad \left(\frac{5}{6}\pi; \pi + \arcsin \frac{2}{3}\right); \\ \left(\pi + \arcsin \frac{2}{3}; 2\pi - \arcsin \frac{2}{3}\right); \quad \left(2\pi - \arcsin \frac{2}{3}; \frac{7}{6}\pi\right).$$

Далее определяем знак выражения $\left(\sin x + \frac{2}{3}\right)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)$ на любом из приведенных интервалов, например, на четвертом:

$\left(2\pi - \arcsin \frac{2}{3}; \frac{7}{6}\pi\right)$. На нем $\sin x - \frac{1}{2} < 0$, $\sin x + \frac{2}{3} > 0$, т. е. выражение $\left(\sin x + \frac{2}{3}\right)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)$ имеет знак « $-$ ». На следующих интервалах знаки этого выражения будут чередоваться (рис. 5.8, б).

Ответ: $x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5}{6}\pi + 2\pi n\right] \cup \left[\pi + \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi n; 2\pi - \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Замечание к методу интервалов. Метод интервалов для решения тригонометрических неравенств удобно применять, когда последние приведены к виду

$$(f(x) - a_1)(f(x) - a_2) \dots (f(x) - a_n) \vee 0, \quad \vee \in \{\leq, \geq\},$$

где $f(x)$ — одна из тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$; $a_1, a_2, \dots, a_n$ — некоторые числа.

Далее находятся корни x_k , $k = 1, 2, \dots, K$ простейших уравнений:

$$f(x) = a_1, \quad f(x) = a_2, \quad \dots, \quad f(x) = a_n.$$

Эти корни наносятся на единичную окружность в виде точек. Они разобьют окружность на некоторое число M дуг (отрезок $[0, 2\pi]$ на M интервалов). Это число M в общем случае не будет совпадать с числом K корней x_k простейших уравнений, поскольку некоторые корни могут совпадать.

Если в некоторой точке на единичной окружности нечетное число совпадающих корней, то при переходе через такую точку знак выражения

$$(f(x) - a_1)(f(x) - a_2) \dots (f(x) - a_n)$$

меняется на противоположный. Если же в точке четное число корней, то знак выражения не меняется.

Пример 5.8. Решите неравенство

$$4 \cos x \cos 2x > 1. \quad (5.4)$$

Решение. Преобразуем:

$$4 \cos x \cos 2x = \frac{4 \sin x \cos x \cos 2x}{\sin x} = \frac{\sin 4x}{\sin x}, \quad x \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Исходное неравенство примет вид

$$\frac{\sin 4x}{\sin x} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sin 4x - \sin x}{\sin x} > 0.$$

Полученное неравенство является следствием неравенства (5.4). Оно определено для всех $x \in \mathbb{R}$, за исключением $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, тогда как неравенство (5.4) определено на всей числовой прямой. Проверка показывает, что значения $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, являются решениями неравенства (5.4). Для решения неравенства

$\frac{\sin 4x - \sin x}{\sin x} > 0$ применим метод интервалов на единичной окружности. Для этого найдем нули функций $y_1(x) = \sin 4x - \sin x$ и $y_2(x) = \sin x$:

$$\begin{aligned} \sin 4x - \sin x = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = x + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ 4x = \pi - x + 2\pi m, & m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi n}{3}, & n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi m}{5}, & m \in \mathbb{Z}; \end{cases} \\ \sin x = 0 &\Leftrightarrow x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

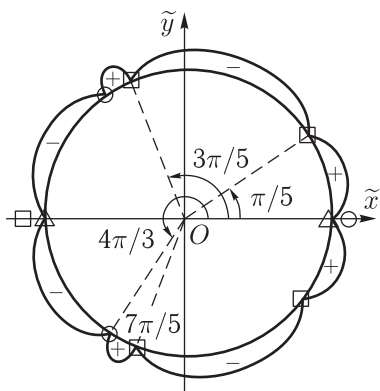


Рис. 5.9

Нанесем нули функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ на единичную окружность (рис. 5.9). При $0 < x < \frac{\pi}{5}$ выражение $\frac{\sin 4x - \sin x}{\sin x}$ положительно. Далее при переходе через каждый нуль функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ знак выражения меняется на противоположный. В точках $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, нули двукратные и потому знак выражения не меняется (рис. 5.9).

С учетом сделанного выше замечания о включении точек $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, в множество решений исходного неравенства (5.4) записываем ответ.

Ответ: $-\frac{\pi}{5} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{5} + 2\pi n$; $\frac{3}{5}\pi + 2\pi n < x < \frac{2}{5}\pi + 2\pi n$;
 $\frac{4}{3}\pi + 2\pi n < x < \frac{7}{5}\pi + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Выражение «в точках $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, нули двукратные» означает, что в этих точках обе функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ обращаются в нуль, т. е. $y_1(\pi k) = 0$ и $y_2(\pi k) = 0$.

Следующие примеры (5.9–5.14) демонстрируют применение различных приемов преобразования тригонометрического неравенства к простейшему или к совокупности простейших тригонометрических неравенств.

Пример 5.9. Решите неравенство

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x \leq 1. \quad (5.5)$$

Решение. Обозначив

$$\sin x + \cos x = t \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2},$$

получим неравенство относительно новой переменной t , где $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ ($t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, так как $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, а $-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$ для всех $x \in \mathbb{R}$),

$$t + \frac{t^2 - 1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (t + 3)(t - 1) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq t \leq 1.$$

Окончательно с учетом области допустимых значений переменной t ($-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$) получаем неравенство $-\sqrt{2} \leq t \leq 1$.

Таким образом, неравенство (5.5) равносильно каждому из неравенств

$$\begin{aligned} -\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq 1 &\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7}{4}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

откуда $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ответ: } \frac{\pi(4n+1)}{2} \leq x \leq 2\pi(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 5.10. Решите неравенство

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x \leq 1. \quad (5.6)$$

Р е ш е н и е. Преобразуем выражение в левой части неравенства:

$$\begin{aligned}
 \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x &= \\
 &= \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} = \\
 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x + \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 6x) = \\
 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x + \cos 4x \cos 2x = \\
 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x (2 \cos 2x + 1) = \\
 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} (2 \cos^2 2x - 1)(2 \cos 2x + 1).
 \end{aligned}$$

Здесь последовательно применены формулы понижения степени и формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.

Отсюда получаем неравенство, равносильное (5.6),

$$(2 \cos^2 2x - 1)(2 \cos 2x + 1) \leq -1.$$

Обозначим $\cos 2x = t$, $-1 \leq t \leq 1$:

$$\begin{aligned}
 (2t^2 - 1)(2t + 1) \leq -1 &\Leftrightarrow 4t^3 + 2t^2 - 2t - 1 \leq -1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow t(2t^2 + t - 1) \leq 0 \Leftrightarrow t(t + 1)(2t - 1) \leq 0.
 \end{aligned}$$

Решив последнее неравенство методом интервалов, получим

$$\left[\begin{array}{l} t \leq -1, \\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} \cos 2x \leq -1, \\ 0 \leq \cos 2x \leq \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

Последние неравенства решим с помощью единичной окружности. Из рис. 5.10 видно, что решениям неравенства (5.6) будут соответствовать углы $2x$ радиан, которым, в свою очередь, отвечают точка M_5 и дуги M_1M_2 , M_3M_4 , т. е.

$$M_5: 2x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$M_1M_2: -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 2x \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$M_3M_4: \frac{\pi}{3} + 2\pi m \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

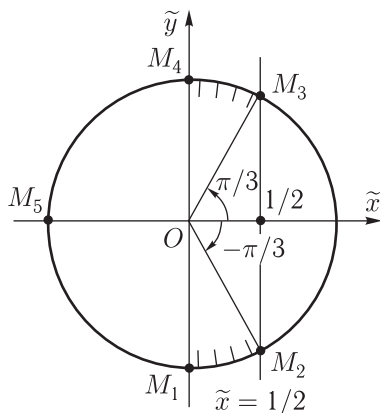


Рис. 5.10

и окончательно имеем

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ -\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + \pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{6} + \pi m \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \pi m, & m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{6} + \pi n \leq |x| \leq \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 5.11. Решите неравенство

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x \leq 0. \quad (5.7)$$

Решение. *Способ 1.* Применив формулу преобразования суммы косинусов в произведение, получим

$$(\cos x + \cos 3x) + \cos 2x = 2 \cos 2x \cos x + \cos 2x = \cos 2x(2 \cos x + 1),$$

откуда следует, что неравенство (5.7) равносильно неравенству

$$\cos 2x(2 \cos x + 1) \leq 0, \quad (5.8)$$

которое, в свою очередь, равносильно неравенству

$$(2 \cos^2 x - 1)(2 \cos x + 1) \leq 0. \quad (5.9)$$

Любое из неравенств (5.8) и (5.9) сводится к совокупности двух систем неравенств и может быть использовано для продолжения

решения. Мы выберем для продолжения решения неравенство (5.9). Оно равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{cases} 2 \cos^2 x - 1 \leq 0, \\ 2 \cos x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\cos x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos x \geq -\frac{1}{2}, \end{cases} \right. \quad (5.10)$$

$$\left[\begin{cases} 2 \cos^2 x - 1 \geq 0, \\ 2 \cos x + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\cos x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos x \leq -\frac{1}{2}. \end{cases} \right.$$

Из рис. 5.11, иллюстрирующего первую систему неравенств в (5.10), видно, что решение этой системы дается объединением отрезков

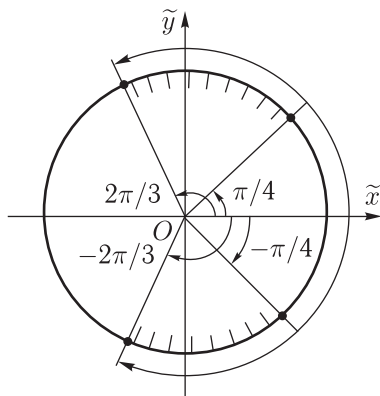


Рис. 5.11

$$\left[-\frac{2}{3}\pi + 2\pi n; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \right] \cup \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{2}{3}\pi + 2\pi n \right],$$

или

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq |x| \leq \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решением второй системы неравенств является множество

$$\left[\frac{3}{4}\pi + 2\pi n; \frac{5}{4}\pi + 2\pi n \right], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Способ 2. Неравенство (5.8) решим методом интервалов на единичной окружности.

1. Находим нули функции

$$f(x) = \cos 2x(2 \cos x + 1)$$

т. е. корни уравнения

$$\cos 2x(2 \cos x + 1) = 0.$$

Ими будут

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

2. Наносим найденные нули функции $f(x)$ на единичную окружность для таких n и m , что $0 \leq x \leq 2\pi$. В результате получим, что нули функции $f(x)$ разбивают отрезок $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{9}{4}\pi\right]$ на 6 интервалов (рис. 5.12).

3. Находим знак $f(x)$ на одном из 6 интервалов, например, при $x = 0$ получим, что $f(0) > 0$, откуда следует, что $f(x) > 0$ для всех $x \in \left(\frac{7}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi\right)$.

Поскольку все нули $f(x)$ однократные, то в следующих интервалах знаки $f(x)$ будут чередоваться. Отметив на единичной окружности знаки $f(x)$ в каждом из интервалов, получим окончательный вид рис. 5.12.

4. Из рис. 5.12 видно, что $f(x) \leq 0$ при

$$x \in \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{2}{3}\pi + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{3}{4}\pi + 2\pi n; \frac{5}{4}\pi + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{4}{3}\pi + 2\pi n; \frac{7}{4}\pi + 2\pi n\right], \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{или } \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq |x| \leq \frac{2}{3}\pi + 2\pi n; \quad \frac{3}{4}\pi + 2\pi n \leq x \leq \frac{5}{4}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq |x| \leq \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \frac{3}{4}\pi + 2\pi n \leq x \leq \frac{5}{4}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 5.12. Решите неравенство

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} \leq \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

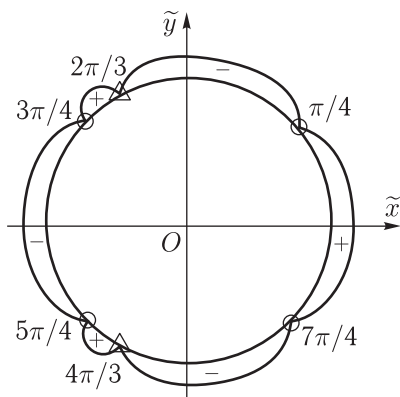


Рис. 5.12

Р е ш е н и е. 1. ОДЗ неравенства:

$$x \in \mathbb{R}, \quad x \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2. Поскольку $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, то исходное неравенство можно переписать в виде

$$t \leq \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{t^2 - 1}{t} \leq 0, \quad \text{где } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Решив последнее неравенство методом интервалов, получим (рис. 5.13):

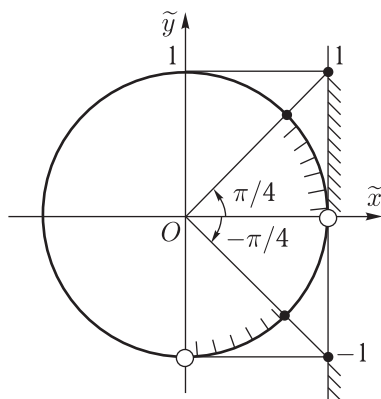


Рис. 5.13

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \leq -1, \\ 0 < \operatorname{tg} \frac{x}{2} \leq 1 \end{array} \right] &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} + \pi n < \frac{x}{2} \leq -\frac{\pi}{4} + \pi n, \\ \pi n < \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{4} + \pi n, \end{array} n \in \mathbb{Z} \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\pi + 2\pi n < x \leq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ 2\pi n < x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{array} \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \pi n < x \leq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $\pi n < x \leq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 5.13. Решите неравенство

$$\left| \sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\sin x} \right| > 1. \quad (5.11)$$

Решение. Поскольку $\sqrt[3]{\cos x} \leq 1$ и $\sqrt[3]{\sin x} \leq 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$, то неравенство (5.11) может выполняться только для тех $x \in \mathbb{R}$, при которых функции $\sin x$ и $\cos x$ имеют одинаковые знаки, т. е. при $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, — в первой и третьей четвертях.

При $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ справедливы неравенства

$$\sqrt[3]{\cos x} > \cos x > \cos^2 x, \quad \sqrt[3]{\sin x} > \sin x > \sin^2 x.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\sin x} > \cos x + \sin x > \cos^2 x + \sin^2 x \equiv 1.$$

При $x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\sin x} \right| &= - \left(\sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\sin x} \right) > \\ &> -(\cos x + \sin x) > \cos^2 x + \sin^2 x \equiv 1. \end{aligned}$$

Объединив интервалы $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$, получим с учетом периодичности функций $\sin x$ и $\cos x$, что неравенство (5.11) выполняется при $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 5.14. Решите неравенство

$$\sqrt{1 + \sin 2x} \leq \sqrt{\sin x + \cos x}. \quad (5.12)$$

Решение. На ОДЗ

$$\sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = |\sin x + \cos x| = \sin x + \cos x.$$

Поэтому неравенство (5.12) равносильно каждому из неравенств

$$t \leq \sqrt{t} \Leftrightarrow \sqrt{t} (\sqrt{t} - 1) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1,$$

где $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 0 \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &\leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x - \frac{\pi}{4} \leq -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \right. & \\
 \left. \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right] &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq 2\pi n, \right. & \\
 \left. \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3}{4}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \right] &
 \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3}{4}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

5.3. Неравенства со сложными тригонометрическими функциями

Неравенства в примерах 5.15–5.20 относятся к категории неравенств повышенной сложности и предназначены для групп с углубленной математической подготовкой.

Пример 5.15*. Решите неравенство

$$\cos(\cos x) > \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение. Обозначим $\cos x = \tilde{x}$ и рассмотрим неравенство $\cos \tilde{x} > \frac{\sqrt{3}}{2}$. Его решением будет

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < \tilde{x} < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку возможные значения $\tilde{x} \in [-1; 1]$ ($-1 \leq \cos x \leq 1$), то окончательно имеем неравенства $-\frac{\pi}{6} < \tilde{x} < \frac{\pi}{6}$, или $-\frac{\pi}{6} < \cos x < \frac{\pi}{6}$ (рис. 5.14).

Отсюда

$$\left[\begin{aligned} -\pi + \arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi n &< x < -\arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ \arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi n &< x < \pi - \arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \right.$$

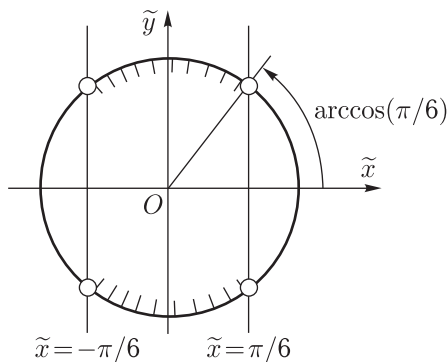


Рис. 5.14

Эту совокупность неравенств можно записать в виде одного двойного неравенства

$$\arccos \frac{\pi}{6} + \pi n < x < \pi - \arccos \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\arccos \frac{\pi}{6} + \pi n < x < \pi - \arccos \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 5.16*. Решите неравенство

$$\sin(\cos x) \leq \frac{1}{2}.$$

Решение. Поскольку $\sin(\cos x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \cos x\right)$, то исходное неравенство принимает вид

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \cos x\right) \leq \frac{1}{2},$$

откуда

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq \frac{\pi}{2} - \cos x \leq \frac{5}{3}\pi + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{6}\pi \leq \cos x \leq \frac{\pi}{6} & (n=0), \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq \cos x \leq \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq 2\pi - \arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $\arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq 2\pi - \arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 5.17*. Решите неравенство

$$\cos(\sin x) \leq \frac{1}{2}.$$

Решение. Сложная функция $f(x) = \cos(\sin x)$ определена на всей числовой прямой. Функция $y = \cos t$, где $t = \sin x$, определена на отрезке $[-1; 1]$, является четной и при этом монотонно убывает на отрезке $[0; 1]$ (поскольку $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$), т. е. $\cos 1 \leq \cos t \leq \cos 0$, или $\cos 1 \leq \cos(\sin x) \leq 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Из неравенства $1 \text{ (рад)} < \frac{\pi}{3} \text{ (рад)}$ следует неравенство $\cos 1 > \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, откуда $\cos(\sin x) > \frac{1}{2}$ для всех $x \in \mathbb{R}$, и потому решением исходного неравенства является пустое множество.

Ответ: $x \in \emptyset$.

Пример 5.18*. Докажите, что для всех x из интервала $(0; \frac{\pi}{2})$ справедливы неравенства

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \quad (5.13)$$

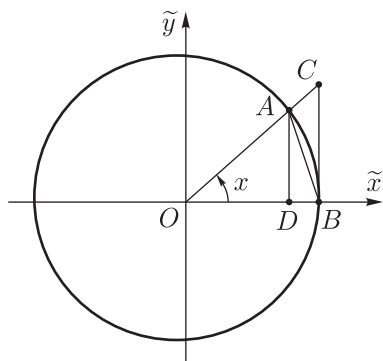


Рис. 5.15

Решение. На координатной плоскости $O\tilde{x}\tilde{y}$ построим единичную окружность и проведем луч OA (рис. 5.15).

Обозначим через x угол, который образует луч OA с положительным направлением оси $O\tilde{x}$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$).

Рассмотрим треугольник OAB , сектор OAB и треугольник OCB ($CB \perp OB$). Обозначим их площади соответственно S_1 , S_2 и S_3 . Очевидно, $S_1 < S_2 < S_3$, и при этом (отметим еще раз, что радиус окружности $R = OA = OB = 1$)

$$S_1 = \frac{1}{2}OB \cdot AD = \frac{1}{2}OB \cdot OA \sin x = \frac{\sin x}{2}.$$

Находим далее:

$$S_2 = \frac{1}{2}R^2 \cdot x = \frac{x}{2}; \quad S_3 = \frac{1}{2}OB \cdot BC = \frac{1}{2}OB \cdot OB \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} x}{2},$$

откуда

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \Leftrightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x. \quad \blacksquare$$

Пример 5.19*. Используя неравенство (5.13), докажите справедливость неравенств

$$\text{а) } \cos x > 1 - \frac{x^2}{2}, \quad (5.14)$$

$$\text{б) } \sin x > x - \frac{x^3}{4} \quad (5.15)$$

для всех $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. а) $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$; поскольку $\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$ в силу (5.13), то $\cos x > 1 - 2 \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{2}$;

$$\text{б) } \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right).$$

В соответствии с неравенством (5.13) имеем:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{x}{2}; \quad 1 - \sin^2 \frac{x}{2} > 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{4}.$$

Отсюда $\sin x > 2 \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = x - \frac{x^3}{4}$. ■

Пример 5.20*. Докажите, что для всех $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ справедливо неравенство

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} > x - \frac{x^3}{4} + \frac{x^5}{64}.$$

Решение. Представим $\operatorname{tg} x$ в виде

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos x} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos x}.$$

Поскольку $\frac{1}{\cos x} > 1$ для всех $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то

$$\operatorname{tg} x > 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} > 2 \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{8}\right)^2 = x - \frac{x^3}{4} + \frac{x^5}{64}.$$

Здесь использованы неравенства $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{x}{2}$ и (5.14) с $\frac{x}{2}$ вместо x . ■

5.4. Задачи для самостоятельного решения

К подразделу 5.1

Решите неравенства.

1. $\sin x < \frac{1}{2}$. 2. $\cos x \geq -\frac{1}{2}$. 3. $\sin x \geq \sin 4$. 4. $\cos x < \cos 2$.
 5. $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$. 6. $\operatorname{ctg} x < 3$. 7. $\operatorname{tg} x \leq \operatorname{tg} 2$. 8. $\operatorname{ctg} x > \operatorname{tg} \frac{3}{2}$. 9. $\sin x < \cos 1$. 10. $\cos^2 x \geq \frac{3}{4}$. 11. $\sin^2 x \leq \frac{1}{2}$. 12. $\operatorname{tg}^2 x \geq 3$.

К подразделу 5.2

Решите неравенства (13–35).

13. $2 \sin^2 x - \cos x - 1 \leq 0$.
 14. $4 \sin^2 x + 2(\sqrt{3} + 1) \cos x - 4 - \sqrt{3} < 0$.
 15. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 \geq 0$. 16. $\sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x < \frac{3}{2}$.
 17. $\sin x - \cos x + \sin 2x \geq 1$.
 18. $\sin x - \cos x + 6\sqrt{2} \sin 2x \geq 0$.
 19. $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x \leq 0$. 20*. $\cos x \cos 3x \sin 4x \geq 1$.
 21*. $\cos x \cos 3x \cos 4x \geq 1$. 22*. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x \geq 2$.
 23. $\sqrt{\operatorname{tg} x} < \sqrt{-\cos x}$. 24. $\sqrt{1 - 2 \cos^2 x} \geq 2 \sin x - 1$.
 25. $\sqrt{3 - 4 \sin^2 x} < 2 \sin x + 1$. 26. $\sin 4x \leq 4 \sin x$.
 27. $\sqrt{\operatorname{tg} x - 1} (\cos 12x - 1) \geq 0$. 28. $\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin x} \geq 1$.
 29*. $|1 - 2 \cos 2x| + 3 \sin x \leq 0$. 30. $\frac{\cos 6x - \cos 2x}{\cos 3x} \leq 0$.
 31. $\cos 2x - \cos 4x < 0$. 32. $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 6x > 3$.
 33. $\sqrt{3 + \sin 3x} \geq 2 \sin x$. 34. $\sqrt{3 + 2 \cos 3x} \leq 2 \cos x$.
 35. $\sqrt[4]{\frac{17 + 7 \cos 4x}{24}} > \cos x$.
 36. Найдите сумму корней уравнения

$$\sqrt{18 + 3x - x^2} (\sin \pi x + \cos \pi x) = 0.$$

37. Найдите сумму целочисленных решений неравенства

$$\sqrt{18 + 3x - x^2} (\sin \pi x + \cos \pi x) \leq 0.$$

38. Решите неравенство

$$\cos^4 x + \sin^4 x \geq \frac{\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{1 + \cos x}}$$

на отрезке $[-\pi; 3\pi]$.

Решите неравенства (39–43).

39. $\sec x \geq \operatorname{cosec} x$. **40*.** $\cos(\cos x) < \frac{1}{\sqrt{2}}$. **41*.** $\sin(\sin x) \geq \frac{1}{2}$.

42*. $\sin(\sin x) < 0$. **43*.** $\cos(\sin x) < 0$.

Докажите неравенства (44–46).

44*. $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}$. **45*.** $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{32}$.

46*. $\sin x > x - \frac{x^3}{4} + \frac{x^5}{64}$.

Задачи выпускных и вступительных экзаменов

47. (МГУ, экономический факультет, 1978 г.) Найдите все значения параметра b , при каждом из которых неравенство

$$\cos^2 x + 2b \sin x - 2b < b^2 - 4$$

выполняется для любого числа x .

48. (МГУ, ВМиК, 2000 г.) Найдите все решения неравенства

$$\sqrt{6 \cos x - \sin x + 4} < \sin x + \cos x,$$

принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

49. (МГУ, ВМиК, 2000 г.) Решите неравенство

$$\cos x |\cos x| \geq -\frac{1}{2}.$$

50. (МГУ, геологический факультет, 2000 г.) Решите неравенство

$$16 \sin^2 x + \operatorname{ctg}^2 x \leq 7.$$

51. (МФТИ, 1998 г.) Решите неравенство

$$\sqrt[4]{\frac{7 - \cos 4x}{2}} > -2 \cos x.$$

52. (МФТИ, 1998 г.) Решите неравенство

$$\sqrt[4]{\frac{5 + 3 \cos 4x}{8}} > -\cos x.$$

53. (ГУ ВШЭ, 2003 г.) Сколько целых чисел $x \in [0; 6]$ являются решениями неравенства $\frac{\sin(\frac{\pi x}{3})}{\sin(\frac{\pi x}{6})} \geq 1$:

1) одно или ни одного; 2) два; 3) три; 4) четыре; 5) пять или больше пяти?

54. (ГУ ВШЭ, 2004 г.) Все решения неравенства $\cos^4 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \geq \sin^4 x$, принадлежащие промежутку $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, образуют промежутки, длина которого равна:

1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$; 5) $\frac{5\pi}{6}$.

55. (ГУ ВШЭ, 2004 г.) Наибольшая длина отрезка числовой оси, все точки которого являются решениями неравенства

$$\cos^4 x - \sin^4 x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x,$$

равна:

1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{2}$; 5) $\frac{2\pi}{3}$.

56. (ГУ ВШЭ, 2005 г.) Наибольшая длина промежутка числовой оси, все точки которого являются решениями неравенства

$$\sqrt{16 \sin^4 \frac{\pi x}{12} + 11} \geq 4 \cos \frac{\pi x}{12},$$

равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен:

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 0.

57. (ЕГЭ, 2007 г.: В6) Найдите сумму целых значений функции

$$y = 1,2 \cdot \sqrt{21 + 4 \cos x - 4 \sin^2 x}.$$

5.5. Ответы

1. $\frac{5}{6}\pi + 2\pi n < x < \frac{13}{6}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **2.** $-\frac{2}{3}\pi + 2\pi n \leq x \leq \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **3.** $\pi - 4 + 2\pi n \leq x \leq 4 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **4.** $2 + 2\pi n < x < 2\pi - 2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **5.** $\frac{\pi}{3} + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

6. $\operatorname{arctg} 3 + \pi n < x < \pi + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **7.** $\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **8.** $\pi n < x < \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **9.** $\frac{\pi}{2} + 1 + 2\pi n < x < \frac{5}{2}\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **10.** $-\frac{\pi}{6} + \pi n < x \leq \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **11.** $-\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **12.** $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3} + \pi m \leq x \leq \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

13. $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi m \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. **14.** $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi m < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, или $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < |x| < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **15.** $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + \pi m \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. **16.** $\frac{2}{9}\pi - \frac{1}{3}\operatorname{arcsin} \frac{3}{4} + \frac{2}{3}\pi n < x < \frac{5}{9}\pi + \frac{1}{3}\operatorname{arcsin} \frac{3}{4} + \frac{2}{3}\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **17.** $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\pi + 2\pi m \leq x < \frac{5}{4}\pi + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. **18.** $\frac{\pi}{4} - \operatorname{arcsin} \frac{2}{3}\pi + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \operatorname{arcsin} \frac{3}{4}\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} - \operatorname{arcsin} \frac{3}{4}\pi + (2m+1)\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \operatorname{arcsin} \frac{2}{3}\pi + (2m+1)\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. **19.** $-\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x \leq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + \pi m \leq x \leq \frac{\pi}{3} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{2} + \pi k \leq x \leq \frac{2}{3}\pi + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **20.** $\emptyset$. **21.** $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **22.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + \pi m \leq |x| \leq \frac{\pi}{4} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. **23.** $\pi + 2\pi n \leq x < \pi + \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **24.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{5}{4}\pi + 2\pi m < x < \frac{7}{4}\pi + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. **25.** $\frac{\pi}{10} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{2}{3}\pi + 2\pi m < x < \frac{9}{10}\pi + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. **26.** $2\pi n \leq x \leq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **27.** $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. **28.** $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + 2\pi m \leq x < \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; $\pi + 2\pi k < x \leq$

- $\leq \frac{5}{4}\pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **29.** $-\pi + \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n \leq$
 $\leq x \leq -\arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **30.** $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n,$
 $n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{4} + 2\pi m \leq x < \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}; \frac{3}{4}\pi + 2\pi k \leq x < \frac{5}{6}\pi +$
 $+ 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{7}{6}\pi + 2\pi \ell < x \leq \frac{5}{4}\pi + 2\pi \ell, \ell \in \mathbb{Z}; \frac{3}{2}\pi + 2\pi t <$
 $< x \leq \frac{7}{4}\pi + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$. **31.** $\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{2}{3}\pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
32. $-\frac{\pi}{10} + \pi n < x < \frac{\pi}{10} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{3}{10}\pi + \pi m < x < \frac{\pi}{2} + \pi m,$
 $m \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{2} + \pi k < x < \frac{7}{10}\pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. **33.** $\frac{2}{3}\pi + 2\pi n \leq x \leq$
 $\leq \frac{7}{3}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **34.** $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$
 $\frac{\pi}{6} + 2\pi m \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z},$ или $\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq |x| \leq \frac{\pi}{3} +$
 $+ 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **35.** $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{11}{6}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **36.** $\frac{75}{4}$.
37. 11. **38.** $\left\{-\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}\right\} \cup (\pi; 3\pi)$. **39.** $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$
 $n \in \mathbb{Z}; \pi + 2\pi m < x \leq \frac{5}{4}\pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}; \frac{3}{2}\pi + 2\pi k < x <$
 $< 2\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **40.** $-\arccos \frac{\pi}{4} + \pi n < x < \arccos \frac{\pi}{4} + \pi n,$
 $n \in \mathbb{Z}$. **41.** $\arcsin \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \pi - \arcsin \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
42. $\pi + 2\pi n < x < 2\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **43.** $\emptyset$.
47. $b < -2\sqrt{8}; b > 2$. **48.** $x \in \left(\frac{2}{3}\pi; 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{21}-1}{2}\right] =$
 $= \left(\frac{2}{3}\pi; \arccos \frac{\sqrt{21}-24}{37}\right]$. **49.** $x \in \left[-\frac{3}{4}\pi + 2\pi n; \frac{3}{4}\pi + 2\pi n\right], n \in$
 $\in \mathbb{Z}$. **50.** $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **51.** $-\frac{3}{4}\pi + 2\pi n < x < \frac{3}{4}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
52. $-\frac{3}{4}\pi + 2\pi n < x < \frac{3}{4}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **53.** 2 (два). **54.** 5) $(\frac{5\pi}{6})$.
55. 4) $(\frac{\pi}{2})$. **56.** 5) (0). **57.** 11.

Раздел 6

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

6.1. Контрольная работа № 1

Свойства тригонометрических функций

Вариант 1

1. Вершины вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ делят окружность в отношении $AB : BC : CD : DA = 3 : 4 : 5 : 6$. Найдите внутренние углы четырехугольника.

2. Определите знак числа $\sin 5 \cdot \cos 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{22}{3} \pi$.

3. Вычислите $\sin 570^\circ \cdot \operatorname{tg} 750^\circ + \sec 690^\circ \cdot \operatorname{cosec} 810^\circ$.

4. Вычислите $\frac{\cos^2 37^\circ 30' + \sin^2 7^\circ 30'}{\cos 37^\circ 30' + \sin 7^\circ 30'}$.

5. Установите, какие из приведенных функций являются
1) четными, 2) нечетными:

а) $y = \sin x \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; б) $y = |\sin 5x|$;

в) $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cosec} x$; г) $y = x \operatorname{tg} x$.

6. Определите основные (наименьшие) периоды функций:

а) $y = 5 \cos \frac{11}{7}x + 4 \sin \frac{15}{8}x$; б) $y = \cos \frac{2\pi}{3}x + 3 \sin \frac{15\pi}{6}x$.

7. Расположите в порядке возрастания числа:

$$\sin 36^\circ, \sin 172^\circ, \sin 195^\circ, \sin 348^\circ, \sin 440^\circ.$$

8. Решите неравенство

$$(x - \sin 3) \left(x - \operatorname{tg} \frac{5}{6}\pi\right) \left(x - \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\right) \leq 0.$$

9. Найдите множество значений функции

$$y = -4 \cos^2 x - 6 \sin x + 9.$$

10. Постройте график функции $y = \frac{1}{\cos x - \frac{1}{2}}$ и найдите множество ее значений.

Вариант 2

1. Вокруг треугольника ABC описана окружность. Точками A , B и C окружность делится на части 5, 7, 12 ($AB : BC : CA = 5 : 7 : 12$). На дуге BC взята точка M . Найдите величину угла MBC (ответ запишите в радианах).

2. Переведите из градусной меры в радианную:

а) 2150 ; б) $36^\circ 20'$; в) $167^\circ 30'$; г) 534° .

3. Упростите $\cos^4\left(\frac{17}{2}\pi - \frac{1}{2\pi}\right) - \sin^4\left(\frac{1}{2\pi} - \frac{33}{2}\pi\right)$.

4. Вычислите

$$\sqrt{\operatorname{tg}^2 586^\circ - \sec 660^\circ \operatorname{tg} 226^\circ \operatorname{ctg} 43^\circ + \operatorname{tg}^2 313^\circ + \operatorname{tg} 46^\circ}.$$

5. Установите какие из приведенных функций являются
1) четными, 2) нечетными:

а) $y = \cos(\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$; б) $y = \sin(\operatorname{tg} x)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

в) $y = \operatorname{tg}(\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$; г) $y = \operatorname{ctg}(\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$.

6. Определите основные периоды функций:

а) $y = 3 \cos\left(\frac{3}{2}x + 4\right) - 7 \sin\left(\frac{9}{5}x - 3\right)$;

б) $y = 2 \sin \frac{4}{9\pi}x + 5 \cos \frac{8}{3}x$;

в) $y = 4 \cos \frac{4}{\sqrt{3}}x + \sin\left(\frac{5x}{\sqrt{12}}\right)$.

7. Сравните числа:

а) $\sin 170^\circ$ и $\sin 370^\circ$; б) $\cos 333^\circ$ и $\cos 444^\circ$;

в) $\operatorname{tg} 233^\circ$ и $\operatorname{ctg} 233^\circ$; г) $\cos 359^\circ 59'$ и $\operatorname{ctg} 44^\circ$.

8. Решите неравенство $\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \left(x - \operatorname{tg} \sqrt{2}\right) \left(\sec \frac{\pi}{6} - x\right) \geq 0$.

9. Найдите множество значений функции

$$y = (\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x)^2.$$

10. Постройте график функции

$$y = \frac{1}{\sin x - \sqrt{3}}$$

и найдите множество ее значений.

6.2. Контрольная работа № 2**Тригонометрические тождества, вычисления****Вариант 1****1. Докажите тождества:**

а) $\sin x + \cos x + \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin x;$

б) $\sin x + \cos x + \sin 3x + \cos 3x = 2\sqrt{2} \cos x \cdot \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right);$

в) $\sin^2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x;$

г) $\frac{\sin 7x + \sin 5x - \sin x - \sin 11x}{\cos x + \cos 5x + \cos 7x + \cos 11x} = \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} 6x;$

д) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5 + 3 \cos 4x}{8};$

е) $\frac{\sqrt{1 + \sin 2x}}{\sqrt{1 - \sin 2x}} = \left| \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right|.$

2. Вычислите:

а) $\frac{\sin 130^\circ \cos 210^\circ - \sin 140^\circ \cos 240^\circ - 1}{\cos^2 55^\circ};$

б) $\frac{1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} 15^\circ}{\sqrt{3} - \operatorname{tg} 15^\circ};$ в) $\cos^6 \frac{\pi}{8} - \sin^6 \frac{\pi}{8};$

г) $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} \left(\sin \frac{23}{10} \pi + \sin \frac{11}{10} \pi \right);$

д) $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ и $\alpha \in \left(\frac{5}{4}\pi; \frac{3}{2}\pi \right);$

е) $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, если $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{3} + 1}{2};$

ж) $\left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} \right| + \left| \operatorname{tg} \frac{7}{8}\pi - \operatorname{ctg} \frac{7}{8}\pi \right|.$

Вариант 2**1. Докажите тождества:**

а) $\sqrt{2} (\sin x - \cos x) \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = -\cos 2x;$

б) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 4\sqrt{2} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right)}{\sin 4x};$

в) $\sin^4 \left(x - \frac{\pi}{8} \right) + \cos^4 \left(x + \frac{\pi}{8} \right) = \frac{3}{4} - \sin 2x;$

$$\text{г)} \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x} = \operatorname{tg} \frac{5}{2}x;$$

$$\text{д)} \cos^8 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - \sin^8 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin 2x \cdot \frac{3 - \cos 4x}{4};$$

$$\text{е)} \sqrt{\frac{1 - \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)}{1 + \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)}} = |\operatorname{tg} x|.$$

2. Вычислите:

$$\text{а)} \cos 264^\circ - \sin 36^\circ + \cos 114^\circ;$$

$$\text{б)} 32 \cos \frac{\pi}{17} \cos \frac{2\pi}{17} \cos \frac{3\pi}{17} \dots \cos \frac{8\pi}{17};$$

$$\text{в)} \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x, \text{ если } \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3;$$

$$\text{г)} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} \left(\sin \frac{23}{10}\pi + \sin \frac{11}{10}\pi \right), \text{ если } \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \text{ и } x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi \right);$$

$$\text{д)} \sin 2x, \text{ если } \cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{3} \text{ и } x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi \right);$$

$$\text{е)} \frac{2 \sin 3,1\pi \cos 1,9\pi + \cos 2,1\pi}{2 \cos 2,4\pi \sin 2,6\pi \sin 1,1\pi};$$

$$\text{ж)} \left| \cos \frac{\pi}{12} - \operatorname{ctg} \frac{7}{30}\pi \right| - \left| \operatorname{tg} \frac{4}{15}\pi - \sin \frac{11}{12}\pi \right|.$$

6.3. Контрольная работа №3

Обратные функции; обратные тригонометрические функции

Вариант 1

1. Найдите функцию $f^{-1}(x)$, обратную к заданной

$$f(x) = |3x - 2| - |x - 4|, \quad x \geq \frac{2}{3},$$

и постройте графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$.

2. Найдите функцию $f^{-1}(x)$, обратную к заданной

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 14, & 0 \leq x \leq 4, \\ x^2 - 8x + 20, & x > 4, \end{cases}$$

и постройте графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$.

3. Решите уравнение

$$x^2 - 8x + 20 = 4 + \sqrt{x - 4}.$$

4. Решите уравнение $f^{-1}(2x + 1) = 5x + 6$, если

$$f(3x + 2) = 6x - 4.$$

5. Решите неравенство $f(2 \sin x + 4) \geq \cos^2 x + 5$, если

$$f^{-1}(x + 2) = 2x - 4.$$

6. Вычислите:

а) $\sin\left(2 \arccos \frac{1}{4}\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}\right)$;

в) $\cos\left(\frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$; г) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3)$.

7. Вычислите:

а) $\arccos\left(\sin \frac{27}{4} \pi\right)$; б) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 17)$; в) $\arcsin(\cos 11)$.

8. Решите уравнения:

а) $\arccos x = \frac{5}{2}$; б) $\operatorname{arctg} x = \frac{5}{2}$;

в) $\operatorname{arctg} x^2 = \frac{\pi}{6}$; г) $2 \arcsin 2x + 4 \arccos 2x = 3\pi$.

9. Решите неравенства:

а) $-1 < \arcsin x < \frac{\pi}{6}$; б) $|\operatorname{arctg} x| \leq \frac{\pi}{3}$;

в) $\arcsin(2x - 3) \leq \arcsin(3x - 4)$;

г) $\operatorname{arctg}^2 x - \frac{\pi}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{2}{9} \pi^2 \leq 0$.

10*. Решите неравенства:

а) $\arcsin^2 x + 4 \arccos^2 x \geq 2\pi^2$; б) $\arcsin(\sin x) \geq -\frac{x}{7}$.

Вариант 2

1. Найдите функцию $f^{-1}(x)$, обратную к заданной

$$f(x) = |2x + 5| + |3x - 6|, \quad x \leq 2,$$

и постройте графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$.

2. Найдите функцию $f^{-1}(x)$, обратную к заданной

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & -1 \leq x \leq 1, \\ 2x^2 - 4x + 3, & x \geq 1, \end{cases}$$

и постройте графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$.

3. Решите уравнение

$$2x^2 - 4x + 3 = 1 + \sqrt{\frac{x-1}{2}}.$$

4. Решите уравнение $f(3x+2) = 2x-6$, если

$$f^{-1}(x+2) = 4x+6.$$

5. Решите неравенство $f^{-1}(\operatorname{tg} x + 1) \leq \operatorname{tg}^2 x + \frac{\operatorname{tg} x}{2} + \frac{1}{2}$.

6. Вычислите:

а) $\sin\left(\arcsin \frac{1}{4} + \arccos \frac{1}{3}\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(2 \arcsin \frac{1}{4}\right)$;

в) $\cos\left(\frac{1}{2} \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$; г) $\sin\left(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right)$.

7. Вычислите:

а) $\arcsin\left(\cos \frac{49}{3}\pi\right)$; б) $\arccos(\sin 21)$;

в) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{49}{5}\pi\right)$; г) $\arccos(\sin(-17))$.

8. Решите уравнения:

а) $\arcsin x = \frac{\pi}{5}$; б) $\operatorname{arctg} x = 1,5$;

в) $\arcsin^2 x = \frac{\pi}{9}$; г) $\arcsin(x-3) \cdot \arccos(x-3) = -\frac{\pi^2}{9}$.

9. Решите неравенства:

а) $-1 < \arccos x < 3$; б) $|\arcsin(x-1)| \geq \frac{\pi}{3}$;

в) $\operatorname{arctg}(2x-4) \leq \operatorname{arccotg}(2x-4)$;

г) $\arccos x \arcsin x \leq -\frac{5}{18}\pi^2$.

10*. Решите неравенства:

а) $\operatorname{arctg}^2 x + 4 \operatorname{arccotg}^2 x \geq \frac{5}{16}\pi^2$; б) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \geq -\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}$.

6.4. Контрольная работа № 4

Тригонометрические уравнения и неравенства

Вариант 1

Решите уравнения (1–7).

1. $\operatorname{tg}^2 3x = 3$. 2. $\sin 4x - \cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. $\sin 2x + \sin^2 x = \sqrt{5} \sin x$. **4.** $\sin^2 x + \sin^2 3x + \cos^2 2x = \frac{3}{2}$.

5*. $2 \sin^3 x + 2 \sin x + 3 \cos x = 0$. **6.** $2 \cos 2x \sin 3x + \sin 9x = 0$.

7. $1 + \sin 2x = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$.

8. Найдите количество и сумму корней уравнения

$$2 \cos 2x \sin 3x + \sin 9x = 0$$

на отрезке $[-180^\circ; 270^\circ]$.

Решите неравенства (9–13).

9. $\sin^2 x \geq \frac{1}{2}$. **10.** $\cos x < \frac{\pi}{4}$.

11. $\operatorname{tg} x \geq \operatorname{ctg} 3$. **12.** $\operatorname{tg}^2 x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} x - 1 \geq 0$.

13. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x \leq 0$ на отрезке $[0; 2\pi]$.

Вариант 2

Решите уравнения (1–7).

1. $\operatorname{ctg}^2 2x = \frac{1}{3}$. **2.** $\operatorname{tg} 3x + \operatorname{ctg} 3x = -2$.

3. $2 \sin 3x - \cos 2x = -1$. **4.** $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

5*. $7 \sin^3 x + 5 \cos^3 x - 4 \sin x - 2 \cos x = 0$.

6. $2 \cos 5x \cos 3x + \cos 4x = 0$. **7.** $\cos^2 \frac{x}{2} + 1 = \frac{2}{\sin \frac{x}{4}}$.

8. Найдите количество и сумму различных корней уравнения

$$2 \cos 5x \cos 3x + \cos 4x = 0$$

на отрезке $[-90^\circ; 270^\circ]$.

Решите неравенства (9–13).

9. $\cos^2 x < \frac{3}{4}$. **10.** $\sin x < \frac{3}{4}$.

11. $\operatorname{ctg} x \geq \arccos(-1)$. **12.** $4 \cos^2 x + 2(\sqrt{3} - 1) \cos x - \sqrt{3} \geq 0$.

13. $\sin x - \sin 3x + \sin 5x \geq 0$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

Список рекомендуемой литературы

1. *Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х.* Математика для поступающих в вузы. — М.: Дрофа, 2007.
2. *Сергеев И. Н.* Математика. Задачи с ответами и решениями. — М.: КДУ, 2005.
3. Математика. Задачи вступительных экзаменов в МГУ им. М. В. Ломоносова. — М.: УНЦ ДО, 2005.
4. *Быков А. А.* Сборник задач по математике для поступающих в вузы. Ч.2. — М.: Изд. доп. ГУ ВШЭ, 2006.
5. *Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г.* Задачник-практикум по математике для поступающих в вузы. — М.: Оникс 21 век, Мир и образование, 2005.
6. *Шабунин М. И.* Математика для поступающих в вузы. — М.: Лаборатория базовых знаний, 2000.
7. *Кравцев С. В., Макаров Ю. Н., Максимов В. Ф., Нараленков М. И., Чирский В. Г.* Методы решения задач по алгебре. — М.: Экзамен, 2001.
8. *Будак А. Б., Щедрин Б. М.* Элементарная математика: формулы и теоремы, используемые при решении задач. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова; Макс-Пресс, 2007.
9. *Будак А. Б., Щедрин Б. М.* Элементарная математика: методические указания к ответам на теоретические вопросы устного экзамена по математике. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова; Макс-Пресс, 2007.
10. *Шарыгин И. Ф.* Сборник задач по математике с решениями. — М.: Астрель. АСТ, 2001.
11. *Шарыгин И. Ф.* Математика для поступающих в вузы. — М.: Дрофа, 2004.
12. *Нараленков М. И.* Вступительный экзамен по математике. Алгебра. — М.: Экзамен, 2003.
13. 3000 конкурсных задач по математике. — М.: Рольф; Айрис-пресс, 1998.
14. *Говоров В. М., Дыбов П. Т., Мирошин Н. В., Смирнова С. Ф.* Сборник конкурсных задач по математике. — М.: Науча, 1983.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Раздел 1. Тригонометрические функции	5
1.1. Определение и свойства тригонометрических функций.	5
1.1.1. Функции синус и косинус (5). 1.1.2. Функции тангенс и котангенс (6). 1.1.3. Функции секанс и косеканс (9). 1.1.4. Знаки тригонометрических функций (11). 1.1.5. Формулы приведения (11). 1.1.6. Некоторые значения тригонометрических функций (13).	
1.2. Задачи на свойства тригонометрических функций	14
1.2.1. Связь градусной и радианной мер угла (14). 1.2.2. Вычисление значений тригонометрических функций (20). 1.2.3. Четность и нечетность тригонометрических функций (22). 1.2.4. Периодичность тригонометрических функций (25). 1.2.5. Монотонность тригонометрических функций. Экстремумы (30). 1.2.6. Построение графиков тригонометрических функций (41).	
1.3. Задачи для самостоятельного решения.	42
1.4. Ответы	48
Раздел 2. Тригонометрические формулы, тождества и вычисления	53
2.1. Тригонометрические формулы	53
2.2. Тригонометрические тождества	59
2.3. Вычисление тригонометрических выражений	65
2.4. Задачи для самостоятельного решения.	74
2.5. Ответы	79

Раздел 3. Обратные функции. Обратные тригонометрические функции	81
3.1. Обратные функции	81
3.2. Обратные тригонометрические функции.	94
3.2.1. Функции арксинус и арккосинус (95). 3.2.2. Функции арктангенс и арккотангенс (97). 3.2.3. Свойства обратных тригонометрических функций (100). 3.2.4. Вычислительные задачи с обратными тригонометрическими функциями (102). 3.2.5. Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями (115). 3.2.6*. Нахождение алгебраических сумм обратных тригонометрических функций (128).	
3.3. Задачи для самостоятельного решения.	140
3.4. Указания и ответы	152
Раздел 4. Тригонометрические уравнения	160
4.1. Простейшие уравнения	160
4.2. Метод введения вспомогательного угла (решение уравнений вида $a \sin x + b \cos x = c$)	166
4.3. Уравнения относительно одной тригонометрической функции	170
4.4. Однородные и приводящиеся к однородным уравнения.	171
4.4.1. Однородные уравнения (171). 4.4.2. Уравнения, приводящиеся к однородным (177).	
4.5. Решение уравнений вида $R(\sin^{2n} x, \cos^{2k} x) = 0$	179
4.6. Решение уравнений вида $R(\sin x \pm \cos x, \sin 2x) = 0$	184
4.7. Решение уравнений с использованием основных тригонометрических формул.	186
4.8. Замена переменной $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (универсальная подстановка) . .	190
4.9. Метод оценок и другие специальные приемы решения тригонометрических уравнений	196
4.10. Уравнения с радикалами и модулями.	199
4.11. Уравнения с дополнительными условиями. Отбор корней . .	203
4.12. Уравнения со сложными тригонометрическими функциями	205
4.13. Задачи для самостоятельного решения.	206
4.14. Указания и ответы	214
Раздел 5. Тригонометрические неравенства	224
5.1. Простейшие тригонометрические неравенства	224
5.2. Различные тригонометрические неравенства	229

5.3. Неравенства со сложными тригонометрическими функциями	240
5.4. Задачи для самостоятельного решения.	244
5.5. Ответы	246
 Раздел 6. Тематические контрольные работы	 249
6.1. Контрольная работа № 1	249
6.2. Контрольная работа № 2	251
6.3. Контрольная работа №3	252
6.4. Контрольная работа № 4	254
 Список рекомендуемой литературы	 256